姓名: SOLUTION 葉均承 應數一線性代數

學號: ________________

Quiz 2

考試日期: 2025/03/05

1. 請框出答案. 2. 不可使用手機、計算器，禁止作弊!

1. Given a matrix A and use it to answer the following question.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) find the eigenvalues and a corresponding eigenvectors of A: $(2, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$, $(-2, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix})$.

(b) Find a matrix C and a diagonal matrix D such that $AC = CD$.

Answer: C= $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, and D= $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) Is A diagonalizable? (Yes / $\boxed{NO}$) Why? **見下方理由，沒寫理由不給分**

Solution：

Since the characteristic polynomial of A is $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = (-2-\lambda)(2-\lambda)^2$.

$$A - 2I \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow null(A-2I) = sp(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}).$$

$$A - (-2)I \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow null(A+2I) = sp(\begin{bmatrix} -1 \\ -2.5 \\ 1 \end{bmatrix}).$$

(C) 因為只找到兩個 eigenvector，the eigenvectors are NOT form a basis for 3-space, 由 Corollary 1 得知無法對角化。

或是需要利用還沒教的 Theorem 5.4 也能知道 A 不是 diagonalizable，應用的例子請見去年的 quiz 2 第一題。

2. Prove or disprove the following statements: (下面兩題挑一題證即可，記得註明你要證哪題)
   (a) There can be only one eigenvalue associated with an eigenvector of a linear transformation.
   (b) There can be only one eigenvector associated with an eigenvalue of a linear transformation.

Solution：

5-1 # 23(d)(e)

這兩題其實很簡單，我把題目翻譯一下就好，如果想不到答案再來問。

(a) 對一個 linear transformation 的 eigenvector 來說，eigenvalue 是唯一的.
    這是對的。

(b) 對一個 linear transformation 的 eigenvalue 來說，eigenvector 是唯一的.
    這是錯的。