數學思維與解題期末報告

第三組 生活中的機率

組員：王貴福、陳品升、黃俊程、黃崇銘

前言：首位系統性推算機率的人為十六世紀的卡爾達諾，在他的著作中有許多與博弈相關的內容。然而，首次提出系統研究機率的是帕斯卡和費馬來往的系列信件中。通信最初是由帕斯卡提出向費馬請教幾個關於由 Chevalier de Méré（知名作家，亦為一名狂熱賭徒）提出的問題—擲骰問題、獎金分配問題。我們可以發現機率與博弈之間存在密不可分的關係，故希望藉由此次報告略為闡釋「機率」與「博弈中的機率」。 （參照參考資料 1）

一：機率是什麼？

0 至 1 之間的實數，是一種隨機事件發生的「可能性」。例如：擲一枚硬幣出現正面的機率為$\frac{1}{2}$（含有正反兩面因此各有$\frac{1}{2}$的機率）、擲一顆六面骰子出現奇數點的機率為$\frac{1}{2}$（六面點數依序為 1、2、3、4、5、6，故擲出奇數點機率為$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$） （參照參考資料 1）

二：博弈中的機率

Ⅰ猜拳：共有剪刀、石頭和布 3 種拳法，剪刀勝於布，布勝於石頭，石頭勝於剪刀，若出相同拳法則平手。而當遊戲人數大於 2 人時，若所出拳法中含有剪刀、石頭和布，該局即平手

Q1：兩人進行猜拳遊戲，平手機率為何？

A1：兩人猜拳平手意即所出拳法相同，平手機率即「平手種類個數/兩人所出拳法的所有組合」$=\frac{3}{9}$（兩人皆出剪刀、石頭或布即平手；所有拳法組合即剪刀搭配剪刀、石頭或布，石頭搭配剪刀、石頭或布，布搭配剪刀、石頭或布等 9 種組合）$=\frac{1}{3}$

Q2：三人進行猜拳遊戲平手的機率為何？

A2：三人猜拳平手意即所出拳法相同或拳法含有剪刀、石頭和布，平手機率即「平手種類個數/三人所出拳法的所有組合」＝$\frac{9}{27}$（三人皆出剪刀、石頭或布，或一人出剪刀、一人出石頭及一人出布，故共有 3+6＝9 種平手方式；所有拳法組合即第一人可出的拳法種類×第二人可出的拳法種類×第三人可出的拳法種類即 3×3×3＝27）＝$\frac{1}{3}$

Q3：n 人進行猜拳遊戲平手的機率為何？

A3：平手為「所有拳法組合－沒有平手的組合」，沒有平手表示 n 個人所出拳法只有 2 種（剪刀搭配石頭、石頭搭配布或布搭配剪刀），所以有$3(2^n)$個，但2^n含有 2 個「所有人皆出同一種拳法」表示平手的結果，故沒有平手的組合有$3(2^n-2)$個；所有拳法組合則為3^n個。因此平手的機率為$\frac{3^n-3(2^n-2)}{3^n}$＝1– $\frac{2^n-2}{3^{n-1}}$

Ⅱ撲克牌：共 52 張牌，分為 4 種花色（黑桃、紅心、方塊和梅花）且每種花色各擁有 13 張牌，依序為 1（A）、2、3、……、11（J）、12（Q）、13（K）。此次會介紹的是撲克牌之組合、十三支中的特殊牌型與其獎金分配問題以及 21 點。撲克牌之組合（牌型）：若為 5 張牌，那麼牌型由小至大為烏龍（所有無法構成下述牌型的組合）、一對（含有 2 張相同點數且其他 3 張皆為不同點數的牌）、兩對（含有 2 個不同點數的一對且第 5 張為不同點數的牌）、三條（含有 3 張相同點數的牌，且其他 2 張皆為不同點數的牌）、順子（分別由 1、2、……、10 為第一項的連續整數數列，花色不得完全相同）、同花（花色相同，但無法組成同花順的 5 張牌）、葫蘆（含有 3 張點數相同的牌且其他 2 張牌的點數相同）、鐵支（含有 4 張點數相同的牌）、同花順（分別由 1、2、……、10 為第一項的連續整數數列，花色須完全相同）；若為 3 張牌，則為烏龍（所有無法構成下述牌型的組合）、一對（含有 2 張相同點數且第 3 張為不同點數的牌）、三條（含有 3 張相同點數的牌）。十三支：每位玩家分得 13 張牌，依 3-5-5 將牌分成 3 墩，且首墩的牌型≦中墩的牌型≦尾墩的牌型，若牌型相同則以點數由小至大（2、3、……、Q、K、A）排列，例：首墩和中墩皆為三條，若首墩為 3 三條，那麼中墩必須為

4 或以上點數的三條。21 點：由莊家發給每位玩家一張暗牌，再發一張明牌，再來由其他玩家選擇是否加牌或者蓋牌，每一輪都選擇加牌或蓋牌，直到所有人都不再繼續加牌。計點方式：A 可視為 1 或 11；2 至 10 作該牌點數；J,Q,K 統一視為 10。目標：讓自己的點數比其他玩家更靠近 21 且不超過（爆掉），或者湊滿五張且不超過 21（過五關）。獲勝效力由大至小排列：過五關且 21 點＞過五關＞21 點，若相同為過五關則雙贏。

$C_m^n=\frac{n!}{m!(n-m)!}$；$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\ldots\times 2\times 1$

Q1：由一副完整的撲克牌中抽取 5 張牌，抽到一對、兩對、三條、順子、同花、葫蘆、鐵支、同花順的機率分別為何？

A1：一對：$\frac{c_4^{13}\times c_1^4\times c_2^4\times\left(c_1^4\right)^3}{c_5^{52}}=\frac{1056}{2499}$≒42.2％（13 種點數先取 4 種，再由 4 種中選取 1 種做對子，剩下 3 種則隨機分配花色）

兩對：$\frac{c_3^{13}\times c_2^3\times\left(c_2^4\right)^2\times c_1^4}{c_5^{52}}=\frac{198}{4165}$≒4.75％（13 種點數先取 3 種，再由 3 種中選取 2 種做對子，剩下 1 種則隨機分配花色）

三條：$\frac{C_3^{13}\times C_1^3\times C_3^4\times\left(C_1^4\right)^2}{C_5^{52}}=\frac{264}{12495}$≒2.11％（13 種點數先取 3 種，再由 3 種中取 1 種做三條，剩下 2 種則隨機分配花色）

順子：$\frac{10\times\left(\left(C_1^4\right)^5-4\right)}{C_5^{52}}=\frac{5}{1274}$≒0.4％（有 10 種組成順子的連續整數數列，每 1 張隨機分配花色，但須扣去 4 個所有花色相同的結果）

同花：$\frac{\left(c_5^{13}-10\right)\times c_1^4}{c_5^{52}}=\frac{1277}{649740}$≒0.2％（13 種點數隨機選取 5 種，扣去組成順子的 10 種組合，再隨機分配花色）

葫蘆：$\frac{C_2^{13}\times C_1^2\times C_3^4\times C_2^4}{C_5^{52}}=\frac{6}{4165}$≒0.14％（13 種點數先取 2 種，再由 2 種中選取 1 種做三條，剩下的一種則做對子）

鐵支：$\frac{C_2^{13}\times C_1^2\times C_1^4}{C_5^{52}}=\frac{1}{4165}$≒0.02％（13 種點數先取 2 種，再由 2 種中選取 1 種做鐵支，剩下的隨機分配花色）

同花順：$\frac{10\times 4}{c_5^{52}}=\frac{1}{64974}$≒0.0015％（有 10 種組成順子的連續整數數列，

但所有花色需相同）

Q2：十三支中的經典牌型五輪車是由 5 個對子和其餘 3 張雜牌組成，若由 1 副牌中隨機抽取 13 張牌，能夠組成五輪車的機率為何？又所有五輪車中可排成首墩為 A 對的五輪車機率為何？

A2：五輪車：$\frac{c_8^{13}\times c_5^8\times(c_2^4)^5\times(c_1^4)^3}{c_{13}^{52}}=\frac{320246784}{5669763925}$≒5.65％（13 種點數先取 8 種，再由 8 種中選取 5 種分別做對子，剩下的點數則隨機分配花色）

首墩為 A 對的五輪車：$\frac{c_2^4\times c_7^{12}\times c_4^7\times(c_2^4)^4\times(c_1^4)^3}{c_8^{13}\times c_5^8\times(c_2^4)^5\times(c_1^4)^3}=\frac{5}{13}$（分母為五輪車總數，分子為首墩為 A 對的五輪車總數，分子：先對 A 進行花色分配，由剩下的 12 種中選取 7 種，再自 7 種中選取 4 種分別做對子，剩下的點數則隨機分配花色）

Q3：十三支中的特殊牌型及其獎金分配如下：

三同花：中墩及尾墩為同花，首墩亦為 3 張相同的花色；每位玩家 3 分，總共 9 分

三順子：中墩及尾墩為順子，首墩亦為連續整數數列（QKA、KA2 不算在內）；每位玩家 4 分，總共 12 分

六對半：6 個對子加 1 張雜牌；每位玩家 4 分，總共 12 分

湊一色：13 張牌全是黑色或紅色；每位玩家 10 分，總共 30 分

全大/小：13 張牌皆為 8 至 A /2 至 8；每位玩家 10 分，總共 30 分

三分天下：牌組有 3 個鐵支；每位玩家 20 分，總共 60 分

三同花順：中墩及尾墩為同花順，首墩亦為同花色的連續整數數列（QKA, KA2 不算在內）；每位玩家 20 分，總共 60 分

十二皇族：13 張牌皆為 JQKA；每位玩家 24 分，總共 72 分

一條龍：A.K.Q.J.10.9.8.7.6.5.4.3.2 各一張；每位玩家 36 分，總共 108 分

至尊清龍：所有牌花色相同的一條龍；每位玩家 108 分，總共 324 分

就機率而言有哪些特殊牌型具有獎金分配問題？

A3：三同花：$\frac{c_3^4 c_1^3 c_3^{13} {c_5^{13}}^2+c_2^4 c_1^2(c_8^{13} c_5^{13}+c_{10}^{13} c_3^{13})}{c_{13}^{52}}=\frac{5705516388}{635013559600}$≒0.9％（第一種情形：分 3 種花色，再選 1 種做首墩；第二種情形：分 2 種花色，再選 1 種做 3-5 分墩共 8 張或 5-5 分墩共 10 張）

三順子：$\frac{2008238080}{c_{13}^{52}}=\frac{2008238080}{635013559600}$≒0.32％（窮舉法，詳解見**五-1**）

六對半：$\frac{c_7^{13}\times c_1^7\times c_1^4\times\left(c_2^4\right)^6}{c_{13}^{52}}=\frac{2241727488}{635013559600}\fallingdotseq$0.35％（13 種點數先取 7 種，再選 1 種做孤張，其餘隨機分配花色）

湊一色：$2\frac{c_{13}^{26}}{c_{13}^{52}}=\frac{20801200}{635013559600}\fallingdotseq$0.0032％（黑牌與紅牌各 26 張）

全大/小：$\frac{c_{13}^{28}}{c_{13}^{52}}=\frac{37442160}{635013559600}\fallingdotseq$0.006％（點數 2-8 與點數 8-A 各 28 張牌）

三分天下：$\frac{c_4^{13}\times c_1^4\times c_1^4}{c_{13}^{52}}=\frac{11440}{635013559600}\fallingdotseq$0.000002％（13 種點數先取 4 種，再選 1 種做孤張）

三同花順：$\frac{c_3^4\times c_1^3\times 11\times 10^2+c_2^4\times c_1^2\times 41\times 10}{c_{13}^{52}}=\frac{18120}{635013559600}\fallingdotseq$0.000003％（第一種情形：分 3 種花色，再選 1 種做首墩；第二種情形：分 2 種花色，再選 1 種做 3-5 分墩或 5-5 分墩）

十二皇族：$\frac{c_{13}^{16}}{c_{13}^{52}}=\frac{560}{635013559600}\fallingdotseq$0.00000009％（J.Q.K.A 共 16 張牌）

一條龍：$\frac{{c_1^4}^{13}}{c_{13}^{52}}=\frac{67108864}{635013559600}\fallingdotseq$0.01％（每 1 張牌隨機分配花色）

至尊清龍：$\frac{4}{c_{13}^{52}}=\frac{4}{635013559600}\fallingdotseq$0.0000000006％

湊一色與全大/小獎金相同，全大/小獲得機率卻將近湊一色的 2 倍；三分天下和三同花順所得獎金相同，然而三同花順獲得機率卻是三分天下的 1.5 倍；十二皇族所得機率遠低於一條龍，獎金獲得卻是一條龍的$\frac{2}{3}$倍。

Q4：由 1 副完整的撲克牌隨機抽取 5 張牌，按照 21 點的規則過五關且 21 點的機率為何？

A4：$\frac{38040}{2598960}\fallingdotseq$1.5％；將 1 分別表 1 和 11，J.Q.K 則表 10 （窮舉法，詳解見**五-2**）

三：生活中的機率

Ⅰ生日問題：以下題目皆不考慮 2/29，（Q2 及延伸參照參考資料 2）

Q1：一位記者在路上隨機詢問路人的生日，請問至少要問幾人才能使得這

些人至少有 2 人生日月分相同的機率大於$\frac{1}{2}$？

A1：設至少要問 n 人，則至少有 2 人生日月分相同的機率為「1－n 人的生日月分皆不同的機率」＝$1-\frac{C_n^{12}\times n!}{12^n}$＞$\frac{1}{2}\rightarrow\frac{1}{2}$＞$\frac{C_n^{12}\times n!}{12^n}\rightarrow$n≧5，故至少要問 5 個人

Q2：一個房間內至少要有幾人才能使得至少有 2 人同一天生日的機率大於$\frac{1}{2}$？

A2：設至少 n 人，則至少有 2 人同一天生日的機率為「1－n 人的生日皆不同的機率」＝$1-\frac{C_n^{365}\times n!}{365^n}$＞$\frac{1}{2}\rightarrow$n≧23，故至少要有 23 人

延伸：在有 100 位同學相聚的同學會上，某數學高手三句不離本行，提到生日問題，進行一個實驗。在已知會中有二人或二人以上同日生的機率近乎 1 的情形下，他請會中每人由前向後報出自己的生日，倘若會中有人舉手表示與報出的生日相同，立即停止試驗。高手願意與人打賭這個實驗必會在第 10 個人報出他的生日或之前就會停止，結果沒有人願意和他賭。

原因：設 n 和 k 為正整數，其中 n≧k，P(n,k)代表在 n 人的群體至少有 2 人生日相同，而其中一人在前 k 人中的機率。樣本空間為365^n，n 維的數列，n=1,2,...,365。我們感興趣的事件為 n 維的前 k 維中至少有一維是重複的數列的集合。這集合的餘事件倒是相當容易計算。就是 n 維中前 k 維均不同的數列的集合，即$365\times 364\times\cdots\times(365-k+1)\times(365-k)^{n-k}$，例如：20 人中前 3 人喊出的生日皆與其他人的生日不同的事件則為$365\times 364\times 363\times 362^{17}$。因此，P(n,k)＝$1-\frac{365\times 364\times\cdots\times(365-k+1)\times(365-k)^{n-k}}{365^n}$，而 P(100,10)＝$1-\frac{365\times 364\times\cdots\times 356\times 355^{90}}{365^{100}}$≒0.928，故高手賭贏的機率高達 92.8%

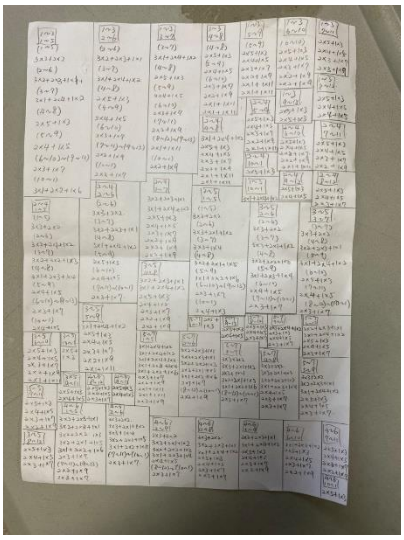
四：參考資料

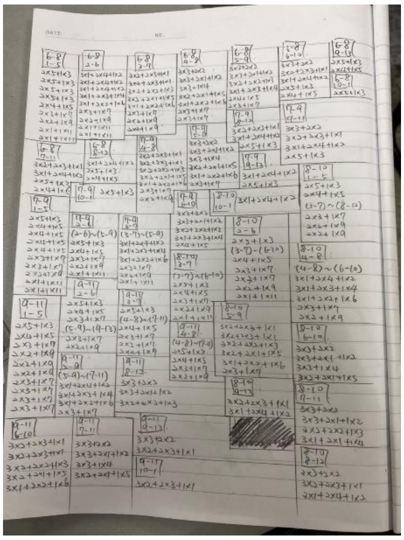
1：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A6%82%E7%8E%87

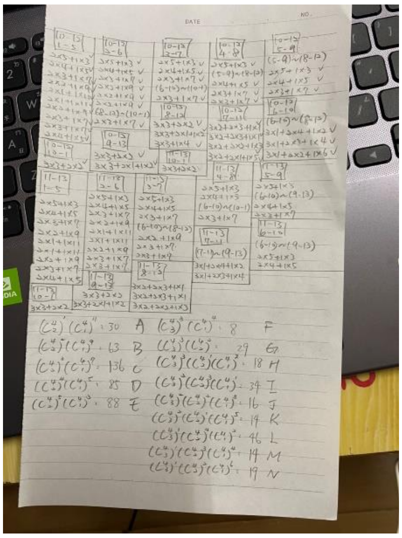
2：http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_04_4_03/index.html

五：

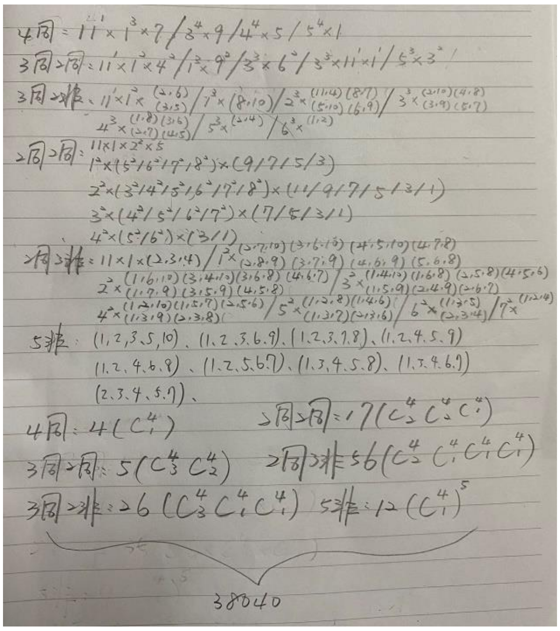
1







2



4同：$11^1\times1^3\times7/3^4\times9/4^4\times5/5^4\times1$

3同2同：$11^1\times1^2\times4^2/1^3\times9^2/3^3\times6^2/3^3\times11^1\times1^1/5^3\times3^2$

3同2非：$11^1\times1^2\times\substack{(2,6)\\(3,5)}/1^3\times(8,10)/2^3\times\substack{(11,4)(8,7)\\(5,10)(6,9)}/3^3\times\substack{(2,10)(4,8)\\(3,9)(5,7)}$

$4^3\times\substack{(1,8)(3,6)\\(2,7)(4,5)}/5^3\times(2,4)/6^3\times(1,2)$

2同2同：$11\times1\times2^2\times5$

$1^2\times(5^2/6^2/7^2/8^2)\times(9/7/5/3)$

$2^2\times(3^2/4^2/5^2/6^2/7^2/8^2)\times(11/9/7/5/3/1)$

$3^2\times(4^2/5^2/6^2/7^2)\times(7/5/3/1)$

$4^2\times(5^2/6^2)\times(3/1)$

2同3非：$11\times1\times(2,3,4)/1^2\times\substack{(2,7,10)(3,6,10)(4,5,10)(4,7,8)\\(2,8,9)(3,7,9)(4,6,9)(5,6,8)}$

$2^2\times\substack{(1,6,10)(3,4,10)(3,6,8)(4,6,7)\\(1,7,9)(3,5,9)(4,5,8)}/3^2\times\substack{(1,4,10)(1,6,8)(2,5,8)(4,5,6)\\(1,5,9)(2,4,9)(2,6,7)}$

$4^2\times\substack{(1,2,10)(1,5,7)(2,5,6)\\(1,3,9)(2,3,8)}/5^2\times\substack{(1,2,8)(1,4,6)\\(1,3,7)(2,3,6)}/6^2\times\substack{(1,3,5)\\(2,3,4)}/7^2\times(1,2,4)$

5非：(1,2,3,5,10)、(1,2,3,6,9)、(1,2,3,7,8)、(1,2,4,5,9)

(1,2,4,6,8)、(1,2,5,6,7)、(1,3,4,5,8)、(1,3,4,6,7)

(2,3,4,5,7)、

4同：4(C_1^4)　2同2同：17($C_2^4C_2^4C_1^4$)

3同2同：5($C_3^4C_2^4$)　2同3非：56($C_2^4C_1^4C_1^4C_1^4$)

3同2非：26($C_3^4C_1^4C_1^4$)　5非：12$(C_1^4)^5$

38040