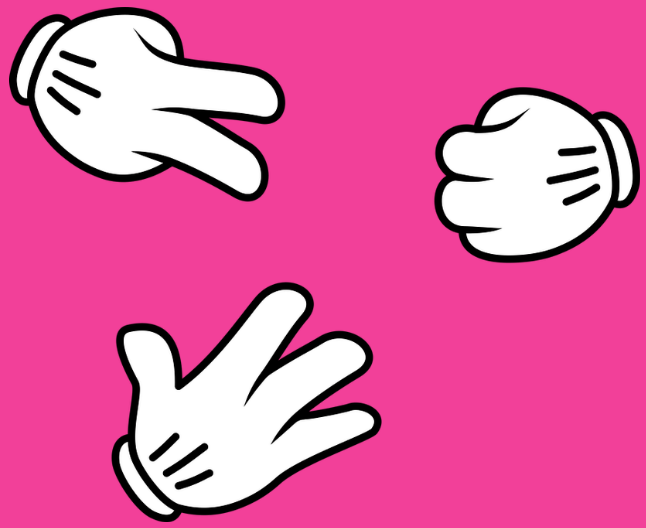
數學思維與解題
期末報告

主題:生活中的機率



第三組

組員:陳品升410931117

王貴福410931125

黃崇銘410931108

黃俊程410931122

前言

- 首位系統性推算機率的人為十六世紀的卡爾達諾，在他的著作中有許多與博弈相關的內容。然而，首次提出系統研究機率的是帕斯卡和費馬來往的系列信件中。通信最初是由帕斯卡提出向費馬請教幾個關於由Chevalier de Méré（知名作家，亦為一名狂熱賭徒）提出的問題—擲骰問題、獎金分配問題。我們可以發現機率與博弈之間存在密不可分的關係，故希望藉由此次報告略為闡釋「機率」與「博弈中的機率」。 （參照參考資料1）

一、機率是甚麼

0至1之間的實數，是一種隨機事件發生的「可能性」。例如：擲一枚硬幣出現正面的機率為$\frac{1}{2}$（含有正反兩面因此各有$\frac{1}{2}$的機率）、擲一顆六面骰子出現奇數點的機率為$\frac{1}{2}$（六面點數依序為1、2、3、4、5、6，故擲出奇數點機率為$\frac{1}{2}$）（參照參考資料1）

二：博弈中的機率

Ⅰ 猜拳

共有剪刀、石頭和布3種拳法，剪刀勝於布，布勝於石頭，石頭勝於剪刀，若出相同拳法則平手。而當遊戲人數大於2人時，若所出拳法中含有剪刀、石頭和布，該局即平手。

Q1：兩人進行猜拳遊戲，平手機率為何？

A1：兩人猜拳平手意即所出拳法相同，平手機率即「平手種類個數/兩人所出拳法的所有組合」$=\frac{3}{9}$（兩人皆出剪刀、石頭或布即平手；所有拳法組合即剪刀搭配剪刀、石頭或布，石頭搭配剪刀、石頭或布，布搭配剪刀、石頭或布等9種組合）$=\frac{1}{3}$

Q2：三人進行猜拳遊戲平手的機率為何？

A2：三人猜拳平手意即所出拳法相同或拳法含有剪刀、石頭和布，平手機率即「平手種類個數/三人所出拳法的所有組合」$=\frac{9}{27}$（三人皆出剪刀、石頭或布，或一人出剪刀、一人出石頭及一人出布，故共有3+6＝9種平手方式；所有拳法組合即第一人可出的拳法種類×第二人可出的拳法種類×第三人可出的拳法種類即3×3×3＝27）$=\frac{1}{3}$

Q3：N人進行猜拳遊戲平手的機率為何？

A3：平手為「所有拳法組合－沒有平手的組合」，沒有平手表示n個人所出拳法只有2種（剪刀搭配石頭、石頭搭配布或布搭配剪刀），所以有$3(2^n)$個，但2^n含有2個「所有人皆出同一種拳法」表示平手的結果，故沒有平手的組合有$3(2^n-2)$個；所有拳法組合則為3^n個。因此平手的機率為

$$\frac{3^n-3(2^n-2)}{3^n}=1-\frac{2^n-2}{3^{n-1}}$$

Ⅱ 撲克牌

共52張牌，分為4種花色（黑桃、紅心、方塊和梅花）且每種花色各擁有13張牌，依序為1（A）、2、3、……、11（J）、12（Q）、13（K）。此次會介紹的是撲克牌之組合、十三支中的特殊牌型與其獎金分配問題以及21點。

撲克牌之組合（牌型）

撲克牌之組合（牌型）：若為5張牌，那麼牌型由小至大為烏龍（所有無法構成下述牌型的組合）、一對（含有2張相同點數且其他3張皆為不同點數的牌）、兩對（含有2個不同點數的一對且第5張為不同點數的牌）、三條（含有3張相同點數的牌，且其他2張皆為不同點數的牌）、順子（分別由1、2、……、10為第一項的連續整數數列，花色不得完全相同）、同花（花色相同，但無法組成同花順的5張牌）、葫蘆（含有3張點數相同的牌且其他2張牌的點數相同）、鐵支（含有4張點數相同的牌）、同花順（分別由1、2、……、10為第一項的連續整數數列，花色須完全相同）；若為3張牌，則為烏龍（所有無法構成下述牌型的組合）、一對（含有2張相同點數且第3張為不同點數的牌）、三條（含有3張相同點數的牌）。

Q1：由一副完整的撲克牌中抽取5張牌，抽到一對、兩對、三條、順子、同花、葫蘆、鐵支、同花順的機率分別為何？

一對：$\frac{C_4^{13}\times C_1^4\times C_2^4\times(C_1^4)^3}{C_5^{52}}=\frac{1056}{2499}\doteqdot 42.2\%$（13種點數先取4種，再由4種中選取1種　做對子，剩下3種則隨機分配花色）

兩對：$\frac{C_3^{13}\times C_2^3\times(C_2^4)^2\times C_1^4}{C_5^{52}}=\frac{198}{4165}\doteqdot 4.75\%$（13種點數先取3種，再由3種中選取2種做對子，剩下1種則隨機分配花色）

三條：$\frac{C_3^{13}\times C_1^3\times C_3^4\times(C_1^4)^2}{C_5^{52}}=\frac{264}{12495}\doteqdot 2.11\%$（13種點數先取3種，再由3種中取1種做三條，剩下2種則隨機分配花色）

葫蘆：$\frac{C_2^{13}\times C_1^2\times C_3^4\times C_2^4}{C_5^{52}}=\frac{6}{4165}\doteqdot 0.14\%$（13種點數先取2種，再由2種中選取1種做三條，剩下的一種則做對子）

鐵支：$\frac{C_2^{13}\times C_1^2\times C_1^4}{C_5^{52}}=\frac{1}{4165}\doteqdot 0.02\%$（13種點數先取2種，再由2種中選取1種做鐵支，剩下的隨機分配花色）

Q1：由一副完整的撲克牌中抽取5張牌，抽到一對、兩對、三條、順子、同花、葫蘆、鐵支、同花順的機率分別為何？

順子：$\frac{10\times\left(\left(C_1^4\right)^5-4\right)}{C_5^{52}}=\frac{5}{1274}\fallingdotseq 0.4\%$（有10種組成順子的連續整數數列，每1張隨機分配花色，但須扣去4個所有花色相同的結果）

同花：$\frac{\left(c_5^{13}-10\right)\times c_1^4}{c_5^{52}}=\frac{1277}{649740}\fallingdotseq 0.2\%$（13種點數隨機選取5種，扣去組成順子的10種組合，再隨機分配花色）

同花順：$\frac{10\times 4}{c_5^{52}}=\frac{1}{64974}\fallingdotseq 0.0015\%$（有10種組成順子的連續整數數列，但所有花色需相同）

十三支

每位玩家分得13張牌，依3-5-5將牌分成3墩，且首墩的牌型≦中墩的牌型≦尾墩的牌型，若牌型相同則以點數由小至大（2、3、……、Q、K、A）排列，例：首墩和中墩皆為三條，若首墩為3三條，那麼中墩必須為4或以上點數的三條。

Q2：十三支中的經典牌型五輪車是由5個對子和其餘3張雜牌組成，若由1副牌中隨機抽取13張牌，能夠組成五輪車的機率為何？又所有五輪車中可排成首墩為A對的五輪車機率為何？

五輪車：$\dfrac{c_8^{13}\times c_5^8\times(c_2^4)^5\times(c_1^4)^3}{c_{13}^{52}}=\dfrac{320246784}{5669763925}\doteqdot 5.65\%$（13種點數先取8種，再由8種中選取5種分別做對子，剩下的點數則隨機分配花色）

首墩為A對的五輪車：$\dfrac{c_2^4\times c_7^{12}\times c_4^7\times(c_2^4)^4\times(c_1^4)^3}{c_8^{13}\times c_5^8\times(c_2^4)^5\times(c_1^4)^3}=\dfrac{5}{13}$（分母為五輪車總數，分子為首墩為A對的五輪車總數，分子：先對A進行花色分配，由剩下的12種中選取7種，再自7種中選取4種分別做對子，剩下的點數則隨機分配花色）

十三支中的特殊牌型及其獎金分配如下：

三同花：中墩及尾墩為同花，首墩亦為3張相同的花色；每位玩家3分，總共9分

三順子：中墩及尾墩為順子，首墩亦為連續整數數列（QKA、KA2不算在內）；每位玩家4分，總共12分

六對半：6個對子加1張雜牌；每位玩家4分，總共12分

湊一色：13張牌全是黑色或紅色；每位玩家10分，總共30分

全大/小：13張牌皆為8至A /2至8；每位玩家10分，總共30分

三分天下：牌組有3個鐵支；每位玩家20分，總共60分

三同花順：中墩及尾墩為同花順，首墩亦為同花色的連續整數數列（QKA, KA2不算在內）；每位玩家20分，總共60分

十二皇族：13張牌皆為JQKA；每位玩家24分，總共72分

一條龍：A.K.Q.J.10.9.8.7.6.5.4.3.2各一張；每位玩家36分，總共108分

至尊清龍：所有牌花色相同的一條龍；每位玩家108分，總共324分

Q3:就機率而言有哪些特殊牌型具有獎金分配問題？

三同花：$\frac{c_3^4 c_1^3 c_3^{13} {c_5^{13}}^2 + c_2^4 c_1^2 (c_8^{13} c_5^{13} + c_{10}^{13} c_3^{13})}{c_{13}^{52}} = \frac{5705516388}{635013559600} \fallingdotseq 0.9\%$（第一種情形：分3種花色，再選1種做首墩；第二種情形：分2種花色，再選1種做3-5分墩共8張或5-5分墩共10張）

三順子：$\frac{2008238080}{c_{13}^{52}} = \frac{2008238080}{635013559600} \fallingdotseq 0.32\%$（窮舉法，詳解見五-1）

六對半：$\frac{c_7^{13} \times c_1^7 \times c_1^4 \times (c_2^4)^6}{c_{13}^{52}} = \frac{2241727488}{635013559600} \fallingdotseq 0.35\%$（13種點數先取7種，再選1種做孤張，其餘隨機分配花色）

湊一色：$2\frac{c_{13}^{26}}{c_{13}^{52}} = \frac{20801200}{635013559600} \fallingdotseq 0.0032\%$（黑牌與紅牌各26張）

全大/小：$\frac{c_{13}^{28}}{c_{13}^{52}} = \frac{37442160}{635013559600} \fallingdotseq 0.006\%$（點數2-8與點數8-A各28張牌）

Q3:就機率而言有哪些特殊牌型具有獎金分配問題？

三分天下：$\frac{c_4^{13}\times c_1^4\times c_1^4}{c_{13}^{52}}=\frac{11440}{635013559600}\doteqdot 0.000002\%$（13種點數先取4種，再選1種做孤張）

三同花順：$\frac{c_3^4\times c_1^3\times 11\times 10^2+c_2^4\times c_1^2\times 41\times 10}{c_{13}^{52}}=\frac{18120}{635013559600}\doteqdot 0.000003\%$（第一種情形：分3種花色，再選1種做首墩；第二種情形：分2種花色，再選1種做3-5分墩或5-5分墩）

十二皇族：$\frac{c_{13}^{16}}{c_{13}^{52}}=\frac{560}{635013559600}\doteqdot 0.00000009\%$（J.Q.K.A共16張牌）

一條龍：$\frac{{c_1^4}^{13}}{c_{13}^{52}}=\frac{67108864}{635013559600}\doteqdot 0.01\%$（每1張牌隨機分配花色）

至尊清龍：$\frac{4}{c_{13}^{52}}=\frac{4}{635013559600}\doteqdot 0.0000000006\%$

Q3:就機率而言有哪些特殊牌型具有獎金分配問題？

湊一色與全大/小獎金相同，全大/小獲得機率卻將近湊一色的2倍；三分天下和三同花順所得獎金相同，然而三同花順獲得機率卻是三分天下的1.5倍；十二皇族所得機率遠低於一條龍，獎金獲得卻是一條龍的$\frac{2}{3}$倍。

湊一色:0.0032% 分數:一人10分 共30分

全大/小:0.006% 分數:一人10分 共30分

十二皇族:0.00000009% 分數:一人24分 共72分

一條龍:0.01% 分數:一人36分 共108分

Q4：由1副完整的撲克牌隨機抽取5張牌，按照21點的規則過五關且21點的機率為何？

A4：$\frac{38040}{2598960}$≒1.5%；將1分別表1和11，J.Q.K則表10 （窮舉法，詳見五-2）

三：生活中的機率-生日問題

以下題目皆不考慮2/29（Q2及延伸參照參考資料2）

Q1：一位記者在路上隨機詢問路人的生日，請問至少要問幾人才能使得這些人至少有2人生日月分相同的機率大於$\frac{1}{2}$？

設至少要問n人，則至少有2人生日月分相同的機率為「1－n人的生日月分皆不同的機率」＝$1-\frac{c_n^{12}\times n!}{12^n}>\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}>\frac{c_n^{12}\times n!}{12^n} \rightarrow n\geqq 5$，故至少要問5個人

Q2：一個房間內至少要有幾人才能使得至少有2人同一天生日的機率大於$\frac{1}{2}$？

A2：設至少n人，則至少有2人同一天生日的機率為「1－n人的生日皆不同的機率」

$$=1-\frac{c_n^{365}\times n!}{365^n}>\frac{1}{2}\rightarrow n\geqq 23$$，故至少要有23人

延伸

在有100位同學相聚的同學會上，某數學高手三句不離本行，提到生日問題，進行一個實驗。在已知會中有二人或二人以上同日生的機率近乎1的情形下，他請會中每人由前向後報出自己的生日，倘若會中有人舉手表示與報出的生日相同，立即停止試驗。高手願意與人打賭這個實驗必會在第10個人報出他的生日或之前就會停止，結果沒有人願意和他賭。

原因

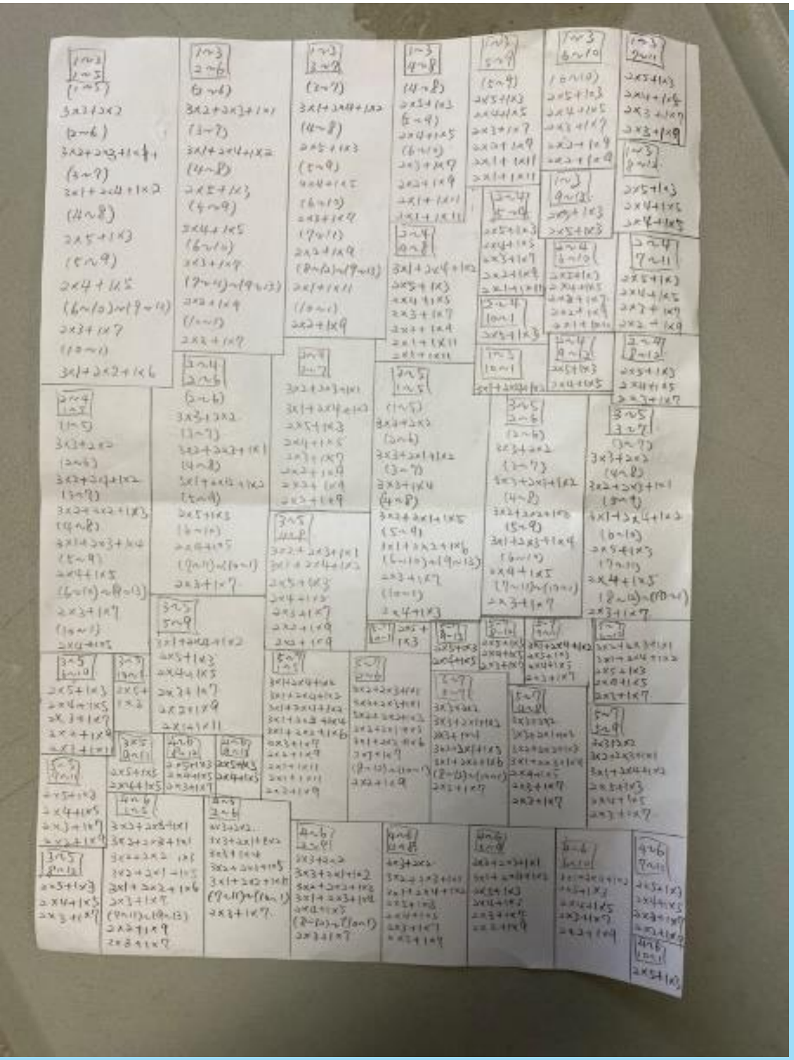
設n和k為正整數，其中n≧k，P(n, k)代表在n人的群體至少有2人生日相同，而其中一人在前k人中的機率。樣本空間為365^n，n維的數列，n=1, 2, ⋯, 365。我們感興趣的事件為n維的前k維中至少有一維是重複的數列的集合。這集合的餘事件倒是相當容易計算。就是n維中前k維均不同的數列的集合，即$365\times364\times\cdots\times(365-k+1)\times(365-k)^{n-k}$，例如：20人中前3人喊出的生日皆與其他人的生日不同的事件則為$365\times364\times363\times362^{17}$。因此，P(n, k)＝1－$\frac{365\times364\times\cdots\times(365-k+1)\times(365-k)^{n-k}}{365^n}$，而P(100, 10)＝$1-\frac{365\times364\times\cdots\times356\times355^{90}}{365^{100}}$≒0.928，故高手賭贏的機率高達92.8%

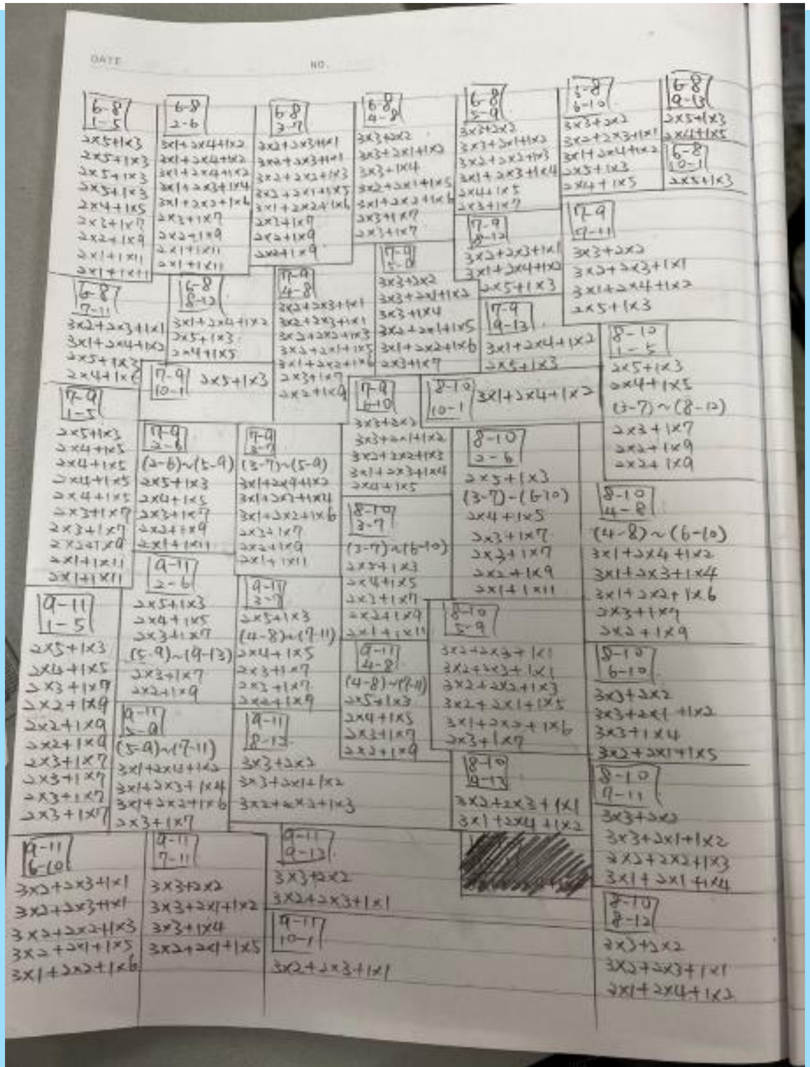
四：參考資料

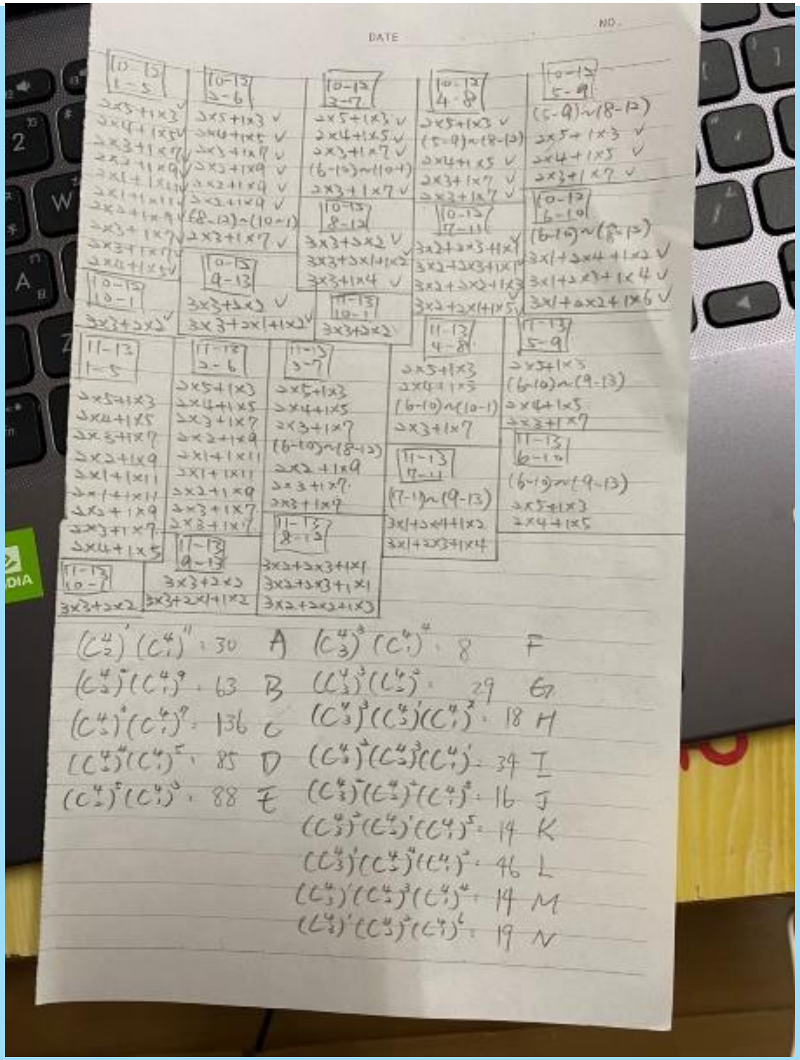
1：https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A6%82%E7%8E%87

2：http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_04_4_03/index.html

五-1







五-2

4同 = $11^1\times1^3\times7 \,/\, 3^4\times9 \,/\, 4^4\times5 \,/\, 5^4\times1$

3同2同 = $11^1\times1^2\times4^2 \,/\, 1^3\times9^2 \,/\, 3^3\times6^2 \,/\, 3^3\times11^1\times1^1 \,/\, 5^3\times3^2$

3同2非 = $11^1\times1^2\times\begin{matrix}(2,6)\\(3,5)\end{matrix} \,/\, 1^3\times(8,10) \,/\, 2^3\times\begin{matrix}(11,4)(8,7)\\(5,10)(6,9)\end{matrix} \,/\, 3^3\times\begin{matrix}(2,10)(4,8)\\(3,9)(5,7)\end{matrix}$

$4^3\times\begin{matrix}(1,8)(3,6)\\(2,7)(4,5)\end{matrix} \,/\, 5^3\times(2,4) \,/\, 6^3\times(1,2)$

2同2同: $11\times1\times2^2\times5$

$1^2\times(5^2/6^2/7^2/8^2)\times(9/7/5/3)$

$2^2\times(3^2/4^2/5^2/6^2/7^2/8^2)\times(11/9/7/5/3/1)$

$3^2\times(4^2/5^2/6^2/7^2)\times(7/5/3/1)$

$4^2\times(5^2/6^2)\times(3/1)$

2同3非 = $11\times1\times(2,3,4) \,/\, 1^2\times\begin{matrix}(2,7,10)(3,6,10)(4,5,10)(4,7,8)\\(2,8,9)(3,7,9)(4,6,9)(5,6,8)\end{matrix}$

$2^2\times\begin{matrix}(1,6,10)(3,4,10)(3,6,8)(4,6,7)\\(1,7,9)(3,5,9)(4,5,8)\end{matrix} \,/\, 3^2\times\begin{matrix}(1,4,10)(1,6,8)(2,5,8)(4,5,6)\\(1,5,9)(2,4,9)(2,6,7)\end{matrix}$

$4^2\times\begin{matrix}(1,2,10)(1,5,7)(2,5,6)\\(1,3,9)(2,3,8)\end{matrix} \,/\, 5^2\times\begin{matrix}(1,2,8)(1,4,6)\\(1,3,7)(2,3,6)\end{matrix} \,/\, 6^2\times\begin{matrix}(1,3,5)\\(2,3,4)\end{matrix} \,/\, 7^2\times(1,2,4)$

5非: (1,2,3,5,10)、(1,2,3,6,9)、(1,2,3,7,8)、(1,2,4,5,9)

(1,2,4,6,8)、(1,2,5,6,7)、(1,3,4,5,8)、(1,3,4,6,7)

(2,3,4,5,7)、

$$\underbrace{\begin{matrix}4同: 4(C_1^4) & 2同2同: 17(C_2^4C_2^4C_1^4)\\ 3同2同: 5(C_3^4C_2^4) & 2同3非: 56(C_2^4C_1^4C_1^4C_1^4)\\ 3同2非: 26(C_3^4C_1^4C_1^4) & 5非: 12(C_1^4)^5\end{matrix}}_{38040}$$

謝謝大家