數學思維與解題期末報告

第四組

主題:畢氏定理之探究

組員:410931103 林楷勛

410931105 莊哲瑞

410931123 林品妍

410931128 許芷榕

410931132 黃壕坤

畢氏定理之探究

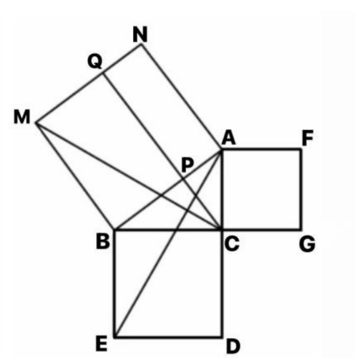
壹、前言

從小到大學過最基本，同時也是陪伴我們最久的定理，非畢氏定理莫屬了。公元前 2600 年前至今仍屹立不搖，古今中外，甚至到了今日仍然有人在研究，若說是數學世界的基石絕不為過，從幾何的各種基本圖形，到代數的各種演算都不難發現畢氏定理的影子。因此，我們希望透過研究畢氏定理的各種證明，以及探索它的各式運用，來了解畢氏定理對數學甚至世界的貢獻。

貳、內容

一、證明

(一)歐幾里得 <幾何原本> **by** 面積等化



∵□BCDE=2△ABE (同底等高)

=2△MBC (全等形)

=▯BPQM (同底等高)

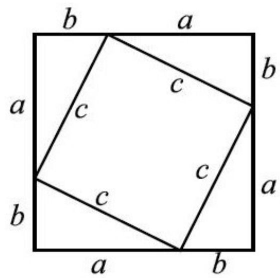
□ACFG=▯APQN (同底等高)

∴□ABMN=▯BPQM+▯APQN

=□BCDE+□ACFG

(二)趙爽〈周髀算經〉**by** 弦圖幾何

(1)

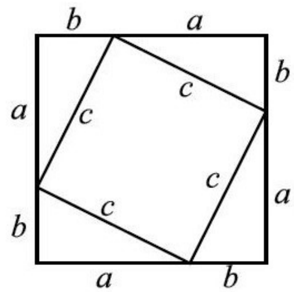


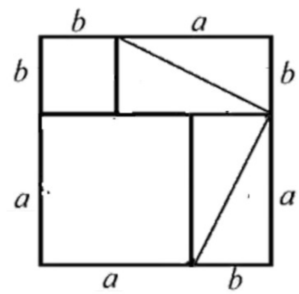
$(a+b)^2=c^2+4\times\frac{1}{2}ab$

$\rightarrow a^2+2ab+b^2=c^2+2ab$

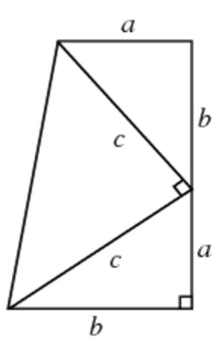
$\rightarrow a^2+b^2=c^2$

(2)





(三)美國總統 Garfield by 梯形組合



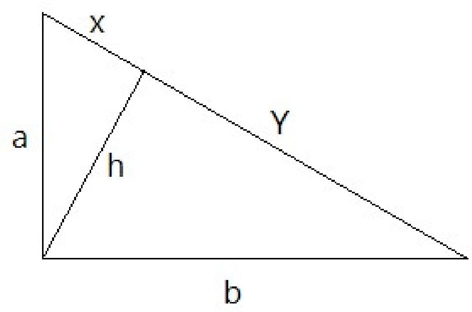
$\because\frac{1}{2}\ (a+b)^2=\frac{1}{2}ab\times2+\frac{1}{2}c^2$

$\rightarrow\frac{1}{2}\ (a^2+2ab+b^2)=ab+\frac{1}{2}c^2$

$\rightarrow\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}c^2$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

(四)比例原則



$\because a\times b=(x+y)\times h=c\times h$

$\therefore h=\frac{ab}{c}$

$\because x : \frac{ab}{c} = a : b$ ， $\frac{ab}{c} : y = a : b$

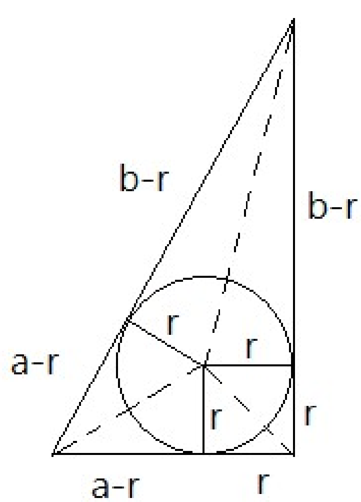
$\therefore \frac{a^2b}{c}=xb , ab^2=ay$

$\therefore a^2=cx , b^2=cy$

$\because a^2+b^2=c(x+y)$

(五)圓圖形解

(1)內切圓



$\because (a-r)+(b-r)=c$

$\therefore r=\frac{1}{2}(a+b-c)$

$\because \frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}ab$

$\rightarrow \frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}ab$

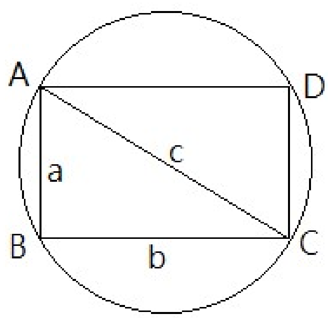
$\therefore r(a+b+c)=ab$

$\rightarrow \frac{1}{2}(a+b-c)(a+b+c)=ab$

$\rightarrow \frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2-c^2)=ab$

$\therefore a^2+b^2=c^2$

(2)外接圓



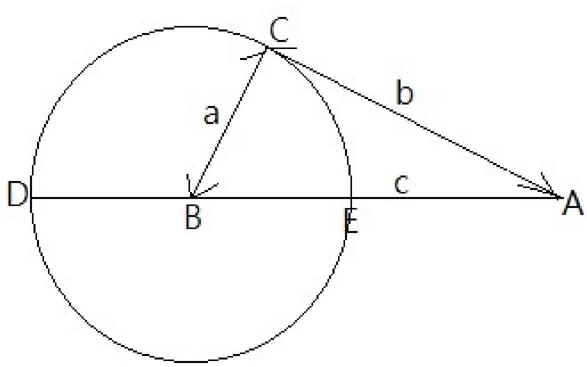
By theorem Ptolemy,we have

$\because \overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}$

$\therefore \overline{AC}=\overline{BD}=c, \overline{AB}=\overline{CD}=a, \overline{AD}=\overline{BC}=b$

$\therefore c^2=a^2+b^2$

(3)圓上切割線



By circle power theorem,we have

$\because \overline{AC}^2=\overline{AE}\cdot\overline{DE}$

$\rightarrow \overline{AC}^2=(\overline{AB}-\overline{BE})\cdot(\overline{AB}+\overline{BD})$

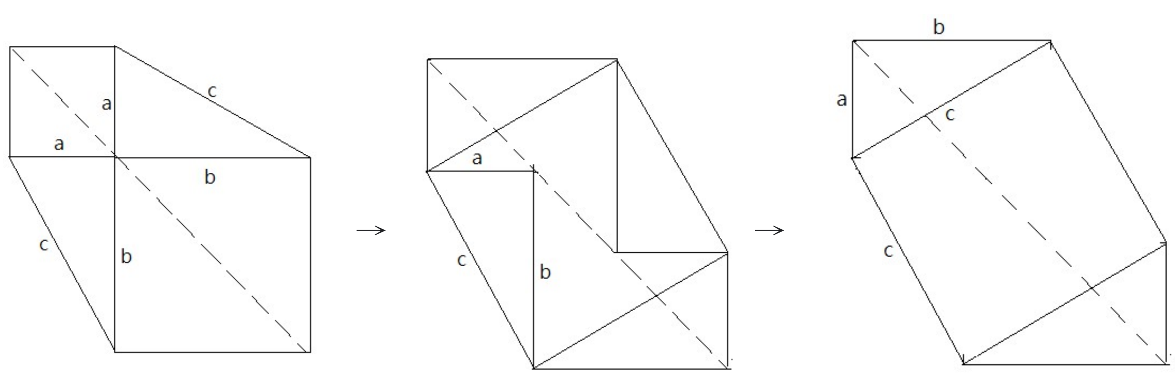
$\rightarrow \overline{AC}^2=(\overline{AB}-\overline{BC})\cdot(\overline{AB}+\overline{BC})$

$\rightarrow \overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$

$\rightarrow \overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$

$\therefore\ a^2+b^2=c^2$

(六)達文西的神奇切割



● 代數解

(1)向量

$\because \vec{c}^2=\vec{c}\cdot\vec{c}$

$\therefore \vec{c}^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$\rightarrow \vec{c}^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}$

$\therefore \vec{c}^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2$

(2)座標

座標平面上有三點 A(x_1,y_1)B(x_2,y_2)C(x_1,y_2)

$\because \overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

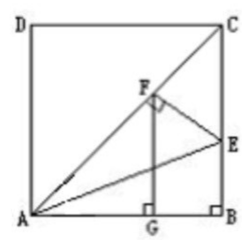
$\because \overline{AB}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2}$

$\therefore \overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$

二·題目

例1、 如圖所示·已知：在正方形 ABCD 中，∠BAC 的平分線交$\overline{BC}$於 E，

作$\overline{EF}\perp$AC 於 F，$\overline{FG}\perp$AB 於 G。求證：$\overline{AB}^2=2\overline{FG}^2$ 。



證：

因$\overline{AE}$是∠FAB 的平分線，

$\overline{EF}\perp\overline{AF}$，又$\overline{AE}$是△AFE 與△ABE 的公共邊，

所以 Rt△AFE≌Rt△ABE(AAS)，

所以$\overline{AF}=\overline{AB}$ -①

在 Rt△AGF 中，因爲∠FAG=45°，所以

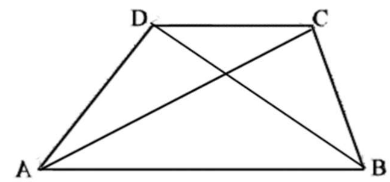
$\overline{AG}=\overline{FG}$，

$\overline{AF}^2=\overline{AG}^2+\overline{FG}^2=2\overline{FG}^2$ -②

由①，②得： $\overline{AB}^2=2\overline{FG}^2$

(資料來源 1)

例2、 如圖 1 梯形 ABCD 中，$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$，$\overline{AB}$=8，$\overline{CD}$=2，$\overline{AC}$=8，$\overline{BD}$=6，式求此梯形 ABCD 的面積【83 年科學才能選拔數學競賽】



▲圖 1

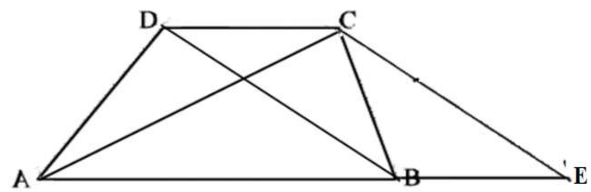
解:

做一條對角線的平行線交$\overline{AB}$於 E(如圖 2)

則△ACE 為直角三角形〔畢式三元數(6，8，10)〕

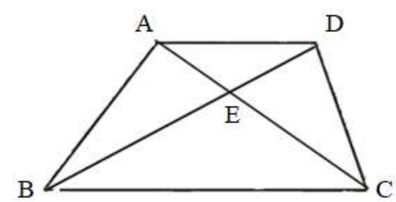
梯形的高=$\frac{6\times8}{10}$=$\frac{24}{5}$

梯形的面積=$\frac{(2+8)}{2}\times\frac{24}{5}$=24



▲圖 2

例3、 如右圖 1，有一梯形 ABCD，$\overline{AD}$平行$\overline{BC}$，$\overline{AB}$=$\overline{AC}$，∠BAC=90°，又$\overline{BD}$=$\overline{BC}$，求∠DEC 的度數。【98 年台南一中數理資優】



▲圖 1

解:

延伸 AD 且做 B 之垂直線交 AD 於 F(如右圖 2)

又$\overline{AB}$=$\overline{AC}$，∠A=90°

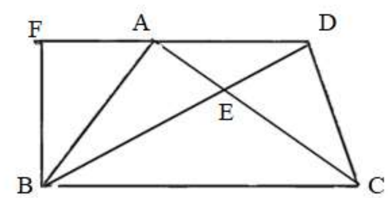
設$\overline{AB}$=1 ∴$\overline{AC}$=1，$\overline{BC}$=2，$\overline{FB}$=$\overline{BC}$上的高=$\frac{\sqrt{2}}{2}$

又$\overline{BD}$=$\overline{BC}$=$\sqrt{2}$

由△DFB 得∠FDB=30°

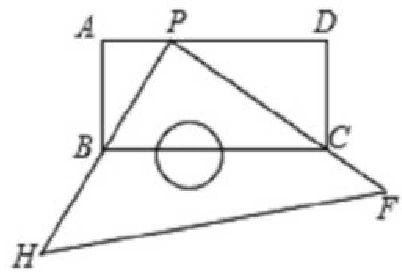
又∠DAC=∠ACB=45

∴∠DEC=75°



▲圖 2

例4、 如圖，有一塊塑料矩形模板 ABCD，長為 10 公分，寬為 4 公分，將你手中足夠大的直角三角板 PHF 的直角頂點 P 落在$\overline{AD}$上(不與 A、D 重合)，在$\overline{AD}$上適當移動三角板頂點 P，能否使你的三角板兩股分別通過點 B 與點 C?若能，請你求出這時的$\overline{AP}$長。若不能，請說明理由。



解:

設$\overline{AP}=\mathcal{X}$ $(0<\mathcal{X}<10)$

根據畢氏定理可知 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{BC}^2$

$\overline{PB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AP}^2=4^2+\mathcal{X}^2$

$\overline{PC}^2=\overline{DC}^2+\overline{DP}^2=4^2+(10-\mathcal{X})^2$

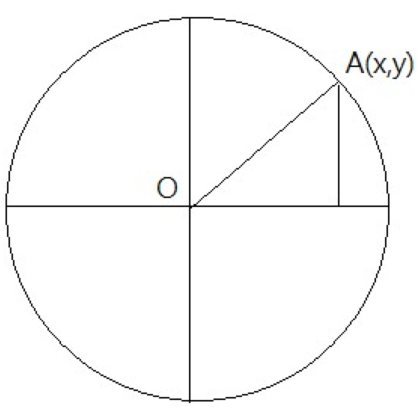
$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=32-20\mathcal{X}+2\mathcal{X}^2=\overline{BC}^2=100$

可得$\mathcal{X}=2 \vee 8$

(資料來源 2)

三、延伸

(一)餘弦定理



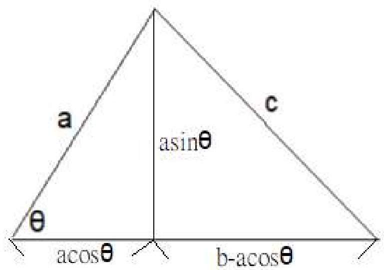
$\because \overline{\mathrm{OA}}^2=x^2+y^2$

Let$\overline{\mathrm{OA}}$=r=1, then we have

$\therefore x^2+y^2=1$

Define(x,y)=r($\cos\theta$,$\sin\theta$)

$\therefore \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$



∵$(a\sin\theta)^2+(b-a\cos\theta)^2=c^2$

→$(a\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2+b^2-2ab\times\cos\theta=c^2$

∵$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$

∴$a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2-2ab\times\cos\theta=a^2+b^2-2ab\times\cos\theta$

∴$c^2=a^2+b^2-2ab\times\cos\theta$

(二)畢氏逆定理

(1) $a^2+b^2=c^2$則△ABC 是直角三角形

(2) $a^2+b^2>c^2$則△ABC 是銳角三角形

(3) $a^2+b^2<c^2$則△ABC 是鈍角三角形

<證明>

(1)

設一三角形 ABC，$\overline{BC}$=a，$\overline{AC}$=b，$\overline{AB}$=c，且∠C=90°

根據餘弦定理

$\cos C=\frac{a^2+b^{2-}c^2}{2ab}$

由於畢氏定理$a^2+b^2=c^2$

可得$\cos C$=0

則∠C=90°

(2)

設一三角形 ABC，$\overline{BC}$=a，$\overline{AC}$=b，$\overline{AB}$=c，且∠C< 90°

根據餘弦定理

$\cos C=\frac{a^2+b^{2-}c^2}{2ab}>0$

若設$\cos C=\mathcal{X}$

則$a^2+b^2-c^2=2ab\mathcal{X}$

→$a^2+b^2-2ab\mathcal{X}=c^2$

→$a^2+b^2>c^2$

(3)

設一三角形 ABC，$\overline{BC}$=a，$\overline{AC}$=b，$\overline{AB}$=c，且∠C< 90°

根據餘弦定理

$\cos C = \frac{a^2+b^{2-}c^2}{2ab} < 0$

若設$\cos C = -\mathcal{X}$

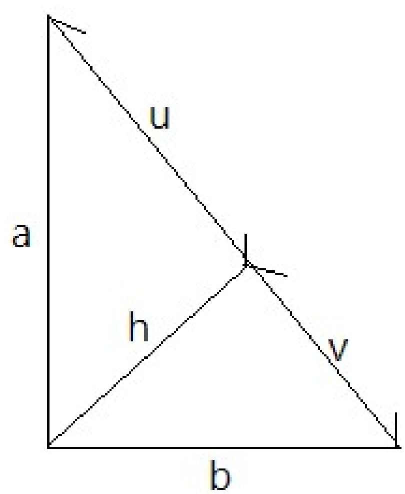
則$a^2 + b^2 - c^2 = -2ab\mathcal{X}$

→$a^2 + b^2 + 2ab\mathcal{X} = c^2$

→$a^2 + b^2 < c^2$

(資料來源 3，畢氏逆定理證明)

(三)畢氏倒定理(Inverse pythagorean theorem)



∵$\frac{1}{2}$uh+$\frac{1}{2}$vh=$\frac{1}{2}$ab

∴h(u+v)=ab

∵u+v=c

∴c=$\frac{ab}{h}$

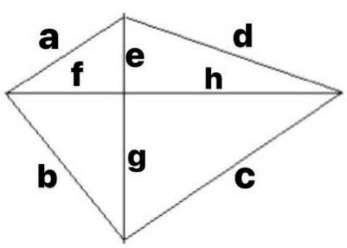
∵$a^2+b^2=c^2=(\frac{ab}{h})^2$

→$\frac{a^2}{a^2b^2}+\frac{b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{h^2}$

∴$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$

(四)圖形問題

(1)箏形

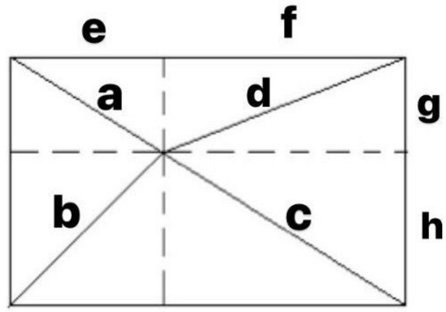


∵$a^2+c^2=(e^2+f^2)+(g^2+h^2)$

∵$b^2+d^2=(f^2+g^2)+(e^2+h^2)$

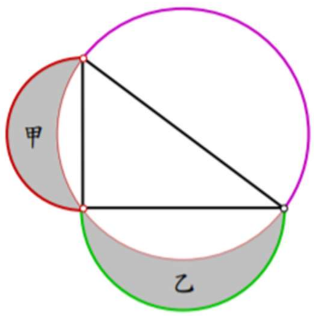
∴$a^2+c^2=b^2+d^2$

(2)矩形內分線



$\because a^2+c^2=(e^2+g^2)+(f^2+h^2)$
$\because b^2+d^2=(e^2+h^2)+(f^2+g^2)$
$\therefore a^2+c^2=b^2+d^2$

(3) 希波克拉底斯(Hippocrates of Chios)新月形



新月形甲的面積+新月形乙的面積
=兩個小半圓的面積和-(大半圓面積-直角三角形面積)
=直角三角形的面積

它意味著新月形的面積可以平方化,也就是可以尺規作圖出一個正方形的面積恰為新月形的面積。

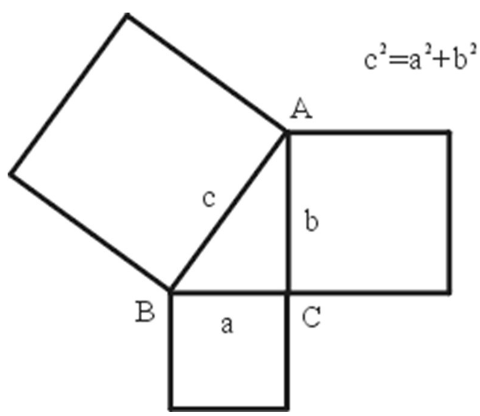
(資料來源 4)

五、 補充

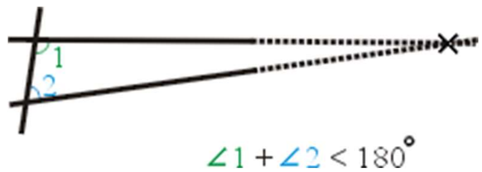
- **歐幾里得《幾何原本》與平行公設**

《幾何原本》是人類文化史上一部非常偉大、有意義的著作,它的主要結論其中之一即是畢氏定理:

(一) 畢氏定理有一直角三角形 *ABC*,則長邊的平方會等於其他兩邊的平方和。 由幾何方面來說,如果我們在三邊上各作一個正方形, 那麼兩個小正方形的面積和就會等於大正方形的面積(見右圖)。



這本書在當時受到重視，不單只是為了學幾何，主要還要學一種邏輯推理的方法。歐幾里得用幾個很明顯的事實——公理，把幾何的結論從公理用邏輯的方法推出。而在他所列出的公理當中，較受爭議的是平行公理。平行公理原來是說：有兩條直線被一直線所截，如果截角的和小於 180°，那麼這兩條直線在充分延長後，必相交於一點。（見下圖）



另一個簡單的說法是：假使有一直線和線外一點， 那麼通過那個點就剛剛好只有一條直線和原來的直線平行。 平行者，就是這兩條直線不相交（見下圖）。

這個平行公理在所有公理之中是最不明顯的，所以數學家或是對數學有興趣的人便想從其他的公理去推得平行公理，而他是否是一個公理也存在著爭議。

(資料來源 5，6)

參、資料來源

1、https://wk.baidu.com/view/28979783dd88d0d233d46a91?pcf=2&bfetype=new

2、https://zhidao.baidu.com/question/188523504.html

3、https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8B%BE%E8%82%A1%E5%AE%9A%E7%90%86

4、http://wp.chjh.tp.edu.tw/blog/cheermath/files/2011/11/Pythagoras-Theorem.pdf

5、https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AC%A7%E5%87%A0%E9%87%8C%E5%BE%97%E5%87%A0%E4%BD%95

6、https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%AC%A7%E5%87%A0%E9%87%8C%E5%BE%97%E5%87%A0%E4%BD%95