畢氏定理之探究

數學思維期末報告

畢氏定理之

證明

方法一:歐幾里得證法(面積等化)

∵□BCDE=2△ABE（同底等高）

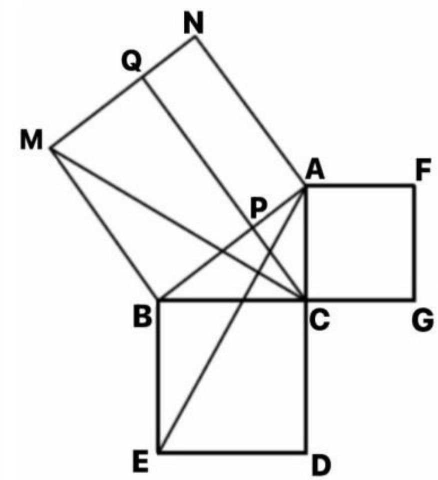
=2△MBC（全等形）

=□BPQM（同底等高）

□ACFG=□APQN（同底等高）

∴□ABMN=□BPQM+□APQN

=□BCDE+□ACFG

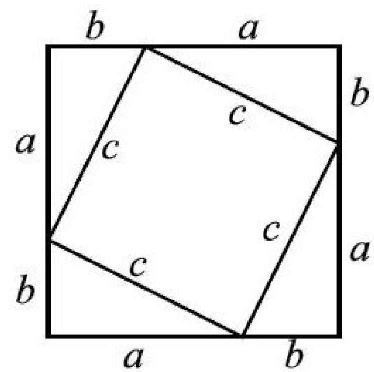


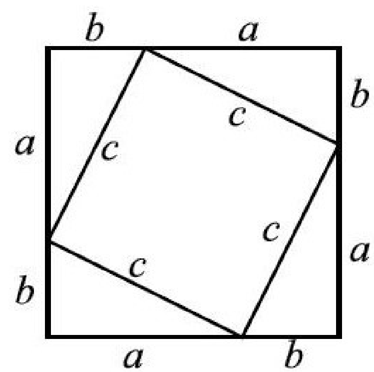
方法二:趙爽《周髀算經》(弦圖幾何)

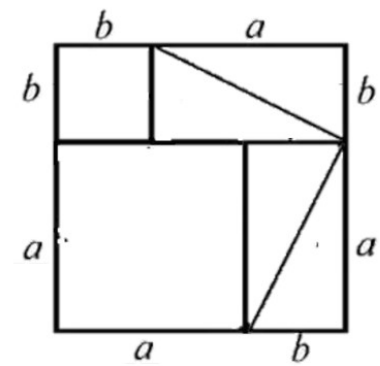
$(a+b)^2=c^2+4\times ab$

$\rightarrow a^2+2ab+b^2=c^2+2ab$

$\rightarrow a^2+b^2=c^2$







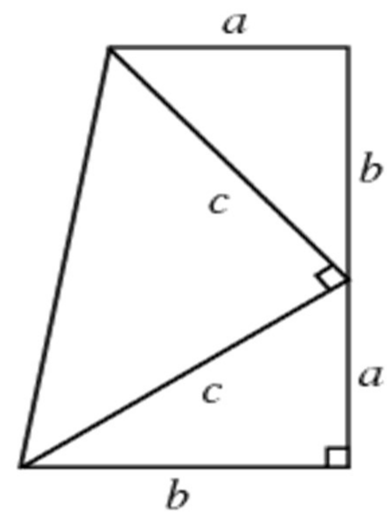
方法三：美國總統Garfield(梯形組合)

$\because \frac{1}{2}(a+b)^2=\frac{1}{2}ab\times 2+\frac{1}{2}c^2$

$\rightarrow \frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2)=ab+\frac{1}{2}c^2$

$\rightarrow \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}c^2$

$\therefore a^2+b^2=c^2$



方法四:比例原則

$\because a \times b = (x+y) \times h = cx$

$\therefore h = ab/c$

$\because x : ab/c = a : b$ ， $ab/c : y = a : b$

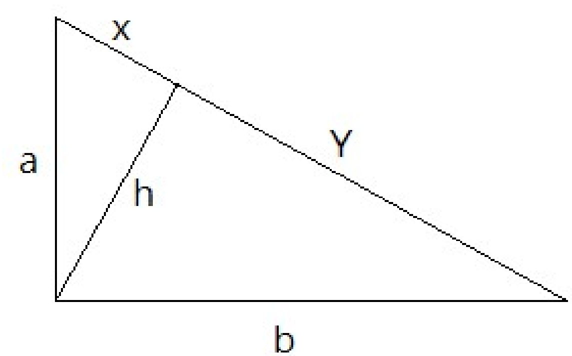
$\therefore a^2b/c = xb$ ， $ab^2 = ay$

$\therefore a^2 = cx$ ， $b^2 = cy$

$\because a^2 + b^2 = c(x+y)$

$\rightarrow a^2 + b^2 = cx$

$\therefore a^2 + b^2 = c^2$



方法五:圓圖形解

(1)內切圓

$\because (a-r)+(b-r)=c$

$\therefore r=\frac{1}{2}(a+b-c)$

$\because \frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}ab$

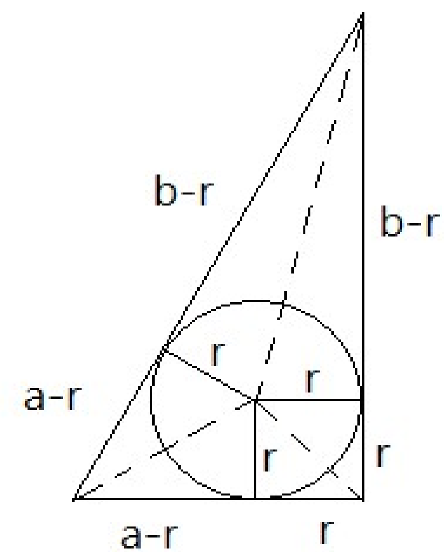
$\rightarrow \frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}ab$

$\therefore r(a+b+c)=ab$

$\rightarrow \frac{1}{2}(a+b-c)(a+b+c)=ab$

$\rightarrow \frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2-c^2)=ab$

$\therefore a^2+b^2=c^2$



方法五:圓圖形解

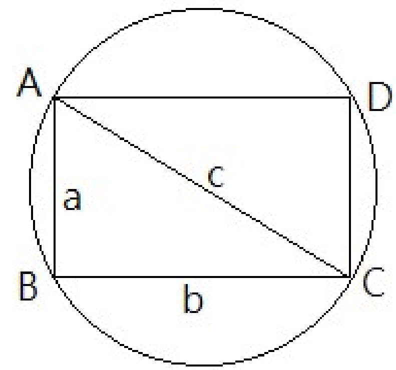
(2)外接圓

By theorem Ptolemy,we have

$\because \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{BD} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

$\therefore \overline{AC} = \overline{BD} = c$，$\overline{AB} = \overline{CD} = a$，$\overline{AD} = \overline{BC} = b$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2$



方法五:圓圖形解

(3)圓上切割線

By circle power theorem,we have

$\because \overline{AC}^2=\overline{AE}\cdot\overline{DE}$

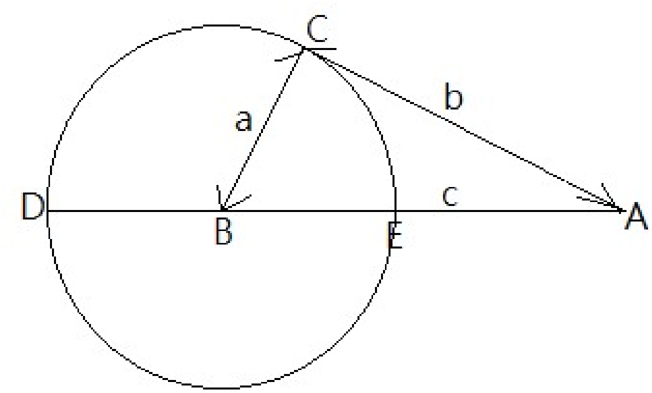
$\rightarrow \overline{AC}^2=(\overline{AB}-\overline{BE})\cdot(\overline{AB}+\overline{BD})$

$\rightarrow \overline{AC}^2=(\overline{AB}-\overline{BC})\cdot(\overline{AB}+\overline{BC})$

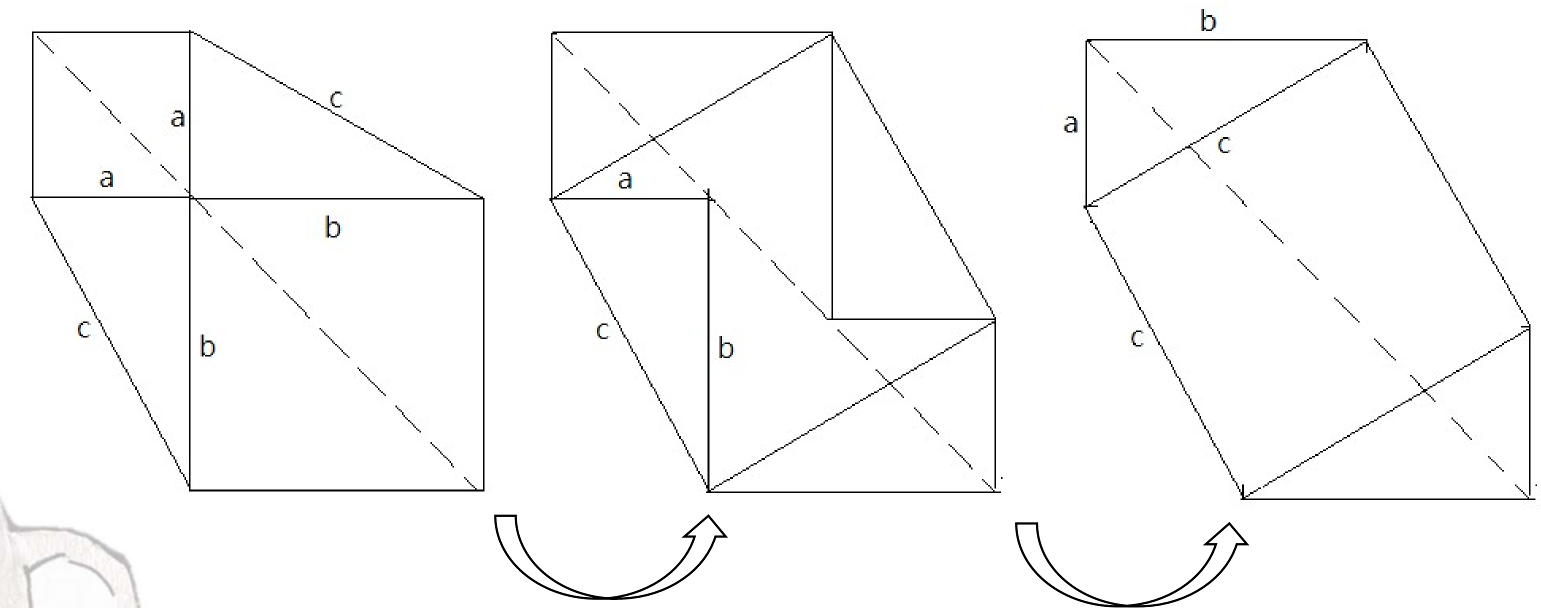
$\rightarrow \overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$

$\rightarrow \overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$

$\therefore a^2+b^2=c^2$



方法六:達文西的神奇切割



方法六:達文西的神奇切割

(1)向量解

$\because \vec{c}^{\,2}=\vec{c}\cdot\vec{c}$

$\therefore \vec{c}^{\,2}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$\rightarrow \vec{c}^{\,2}=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}$

$\therefore \vec{c}^{\,2}=\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}$

(2)座標解

座標平面上有三點

A(x_1,x_2)B(y_1,y_2)C(z_1,z_2)

$\because \overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$\because \overline{AB}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AC}^2}$

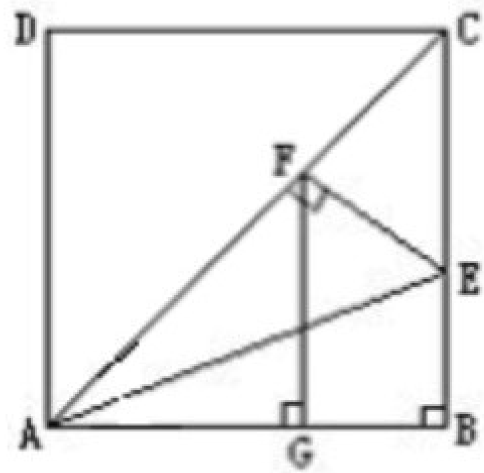
$\therefore \overline{AB}^{\,2}=\overline{BC}^{\,2}+\overline{AC}^{\,2}$

畢氏定理之

題目

例題一的題目

如圖所示，已知：在正方形ABCD中，∠BAC的平分線交$\overline{BC}$於E，作$\overline{EF}\perp AC$於F，$\overline{FG}\perp AB$於G。求證：$\overline{AB}^2=2\overline{FG}^2$。



例題一的解答

證：

因$\overline{AE}$是∠FAB的平分線，

$\overline{EF}\perp\overline{AF}$，又$\overline{AE}$是△AFE與△ABE的公共邊，

所以Rt△AFE≌Rt△ABE(AAS)，

所以 $\overline{AF}=\overline{AB}$ -①

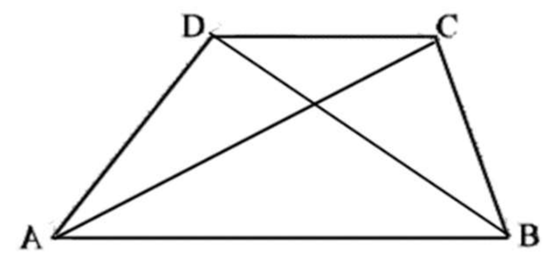
在Rt△AGF中，因爲∠FAG=45°，所以$\overline{AG}=\overline{FG}$，

$\overline{AF}^2=\overline{AG}^2+\overline{FG}^2=2\overline{FG}^2$ -②

由①，②得: $\overline{AB}^2=2\overline{FG}^2$

例題二的題目

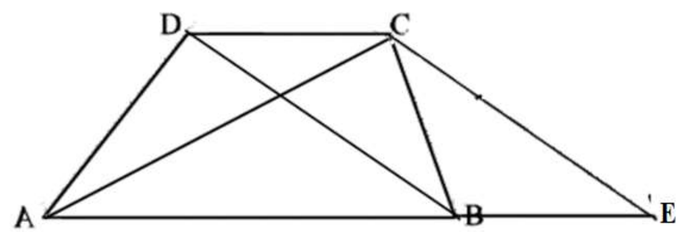
如圖，梯形ABCD中，$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$，$\overline{AB}$=8，$\overline{CD}$=2，$\overline{AC}$=8，$\overline{BD}$=6，試求此梯形ABCD的面積【83年科學才能選拔數學競賽】



例題二的解答

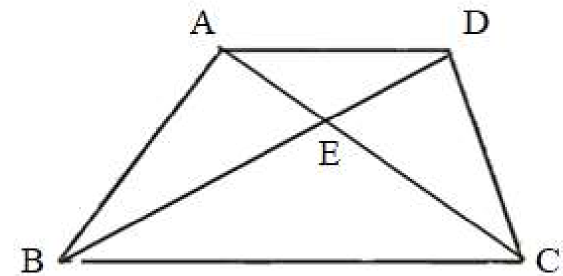
解：

做一條對角線的平行線交$\overline{AB}$於E(如圖)
則△ACE為直角三角形〔畢式三元數(6，8，10)〕
梯形的高$=\frac{6\times8}{10}=\frac{24}{5}$
梯形的面積$=\frac{(2+8)}{2}\times\frac{24}{5}=24$



例題三的題目

如圖，有一梯形ABCD，$\overline{AD}$平行$\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle BAC=90^\circ$，又$\overline{BD}=\overline{BC}$，求$\angle DEC$的度數。【98年台南一中數理資優】



例題三的解答

解：

延伸$\overline{AD}$且做B之垂直線交$\overline{AD}$於F(如圖)

又$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle A=90^\circ$

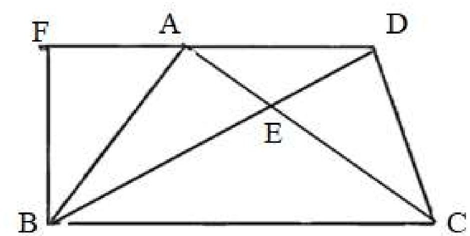
設$\overline{AB}=1 \therefore \overline{AC}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{FB}=\overline{BC}$上的高$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

又$\overline{BD}=\overline{BC}=\sqrt{2}$

由$\triangle DFB$得$\angle FDB=30^\circ$

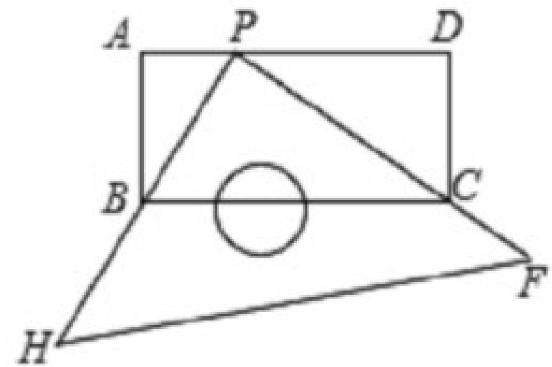
又$\angle DAC=\angle ACB=45$

$\therefore \angle DEC=75^\circ$



例題四的題目

如圖，有一塊塑料矩形模板ABCD，長為10公分，寬為4公分，將你手中足夠大的直角三角板PHF的直角頂點P落在$\overline{AD}$上(不與A、D重合)，在$\overline{AD}$上適當移動三角板頂點P，能否使你的三角板兩股分別通過點B與點C?若能，請你求出這時的$\overline{AP}$長。若不能，請說明理由。



例題四的解答

解：

設$\overline{AP}=\mathcal{X}$（$0<\mathcal{X}<10$）

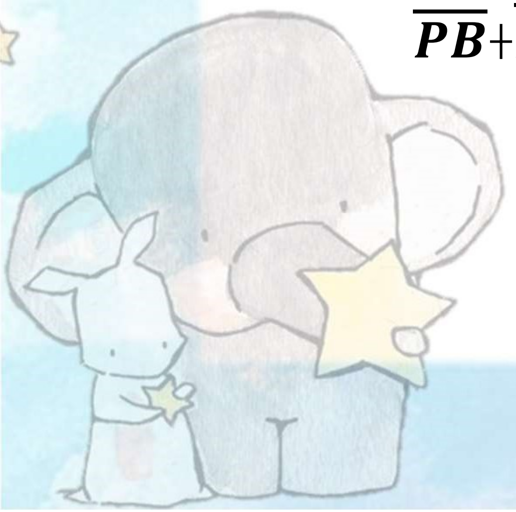
根據畢氏定理可知 $\overline{PB^2}+\overline{PC^2}=\overline{BC^2}$

$\overline{PB^2}=\overline{AB^2}+\overline{AP^2}=4^2+\mathcal{X}^2$

$\overline{PC^2}=\overline{DC^2}+\overline{DP^2}=4^2+(10-\mathcal{X})^2$

$\overline{PB}+\overline{PC^2}=32-20\mathcal{X}+2\mathcal{X}^2=\overline{BC^2}=100$

可得$\mathcal{X}$=2或8



畢氏定理之

延伸

餘弦定理

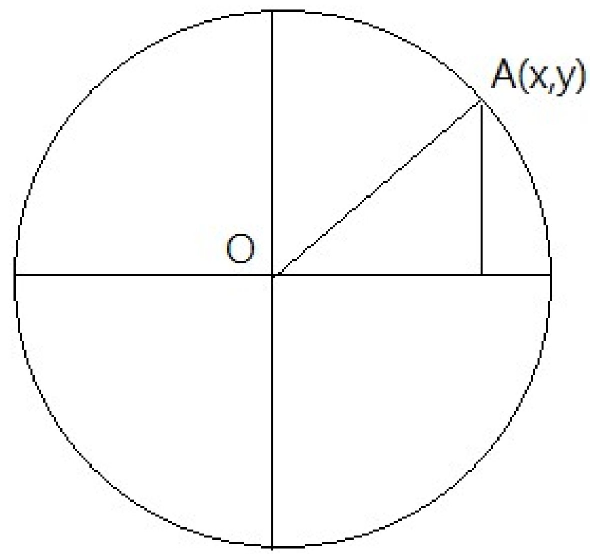
$\because \overline{OA}^2 = x^2 + y^2$

Let $\overline{OA}$=r=1, then we have

$\therefore x^2 + y^2 = 1$

Define(x,y)=r($\cos\theta$,$\sin\theta$)

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$



餘弦定理

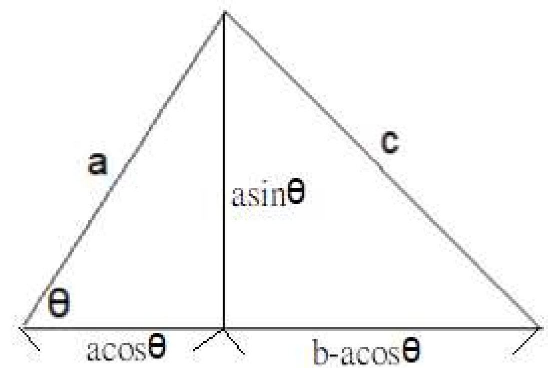
$\because (a\sin\theta)^2+(b-a\cos\theta)^2=c^2$

$\rightarrow (a\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2+b^2-2ab\times\cos\theta=c^2$

$\because \boldsymbol{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

$\therefore a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2-2ab\times\cos\theta=a^2+b^2-2ab\times\cos\theta$

$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\times\cos\theta$



畢式逆定理

(1)$\mathbf{a^2+b^2=c^2}$則△ABC是直角三角形
(2)$\mathbf{a^2+b^2>c^2}$則△ABC是銳角三角形
(3)$\mathbf{a^2+b^2<c^2}$則△ABC是鈍角三角形

畢式逆定理的證明

(1)直角三角形

設一三角形ABC，$\overline{BC}$=a，$\overline{AC}$=b，$\overline{AB}$=c，且∠C=90°

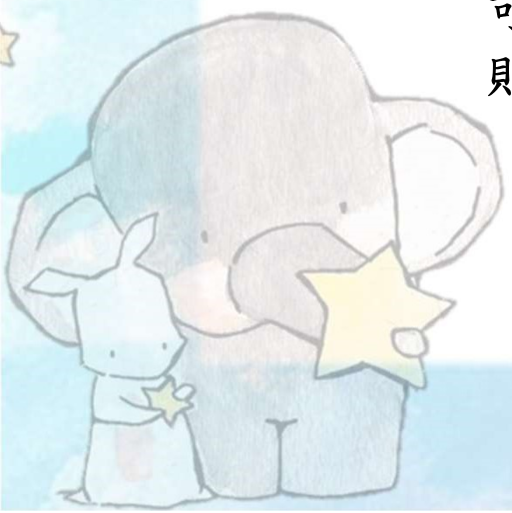
根據餘弦定理

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

由於畢氏定理$a^2+b^2=c^2$

可得$\cos C$=0

則∠C=90°



畢式逆定理的證明

(2)銳角三角形

設一三角形ABC，$\overline{BC}$=a，$\overline{AC}$=b，$\overline{AB}$=c，且$\angle C < 90^\circ$

根據餘弦定理

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} > 0$

若設$\cos C = X$

則$a^2 + b^2 - c^2 = 2abX$

$\rightarrow a^2 + b^2 - 2abX = c^2$

$\rightarrow a^2 + b^2 > c^2$

畢式逆定理的證明

(3)鈍角三角形

設一三角形ABC，$\overline{BC}$=a，$\overline{AC}$=b，$\overline{AB}$=c，且∠C$< 90^{\circ}$

根據餘弦定理

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$$

若設$\cos C=-X$

則$a^2+b^2-c^2=-2abX$

$\rightarrow a^2+b^2+2abX=c^2$

$\rightarrow a^2+b^2<c^2$

畢式倒定理(Inverse pythagorean theorem)

$\because \frac{1}{2}uh+\frac{1}{2}vh=\frac{1}{2}ab$

$\therefore h(u+v)=ab$

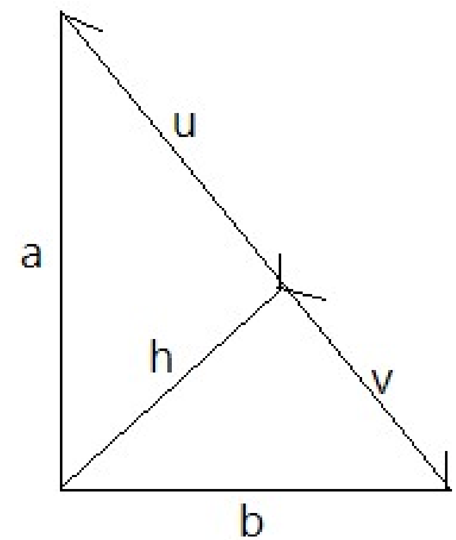
$\because u+v=c$

$\therefore c=\frac{ab}{h}$

$\because a^2+b^2=c^2=(\frac{ab}{h})^2$

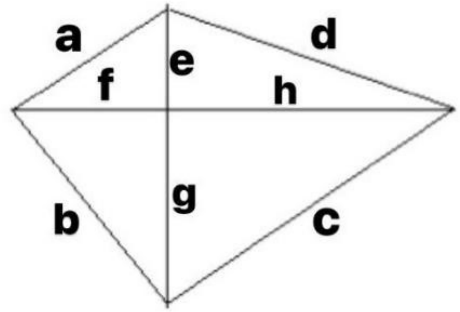
$\rightarrow \frac{a^2}{a^2b^2}+\frac{b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{h^2}$

$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$



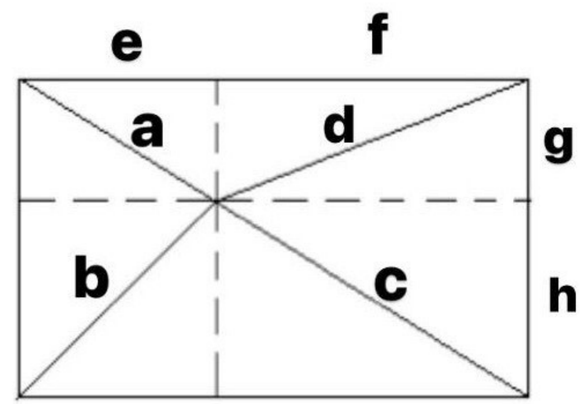
圖形問題

(1)箏形

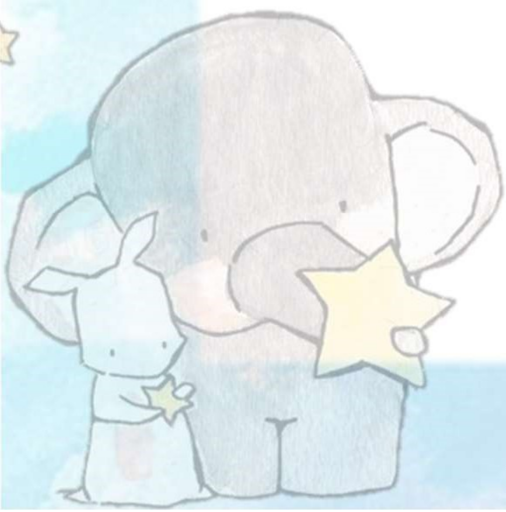


$\because a^2+c^2=(e^2+f^2)+(g^2+h^2)$
$\because b^2+d^2=(f^2+g^2)+(e^2+h^2)$
$\therefore a^2+c^2=b^2+d^2$

(2)矩形內分線



$\because a^2+c^2=(e^2+g^2)+(f^2+h^2)$
$\because b^2+d^2=(e^2+h^2)+(f^2+g^2)$
$\therefore a^2+c^2=b^2+d^2$

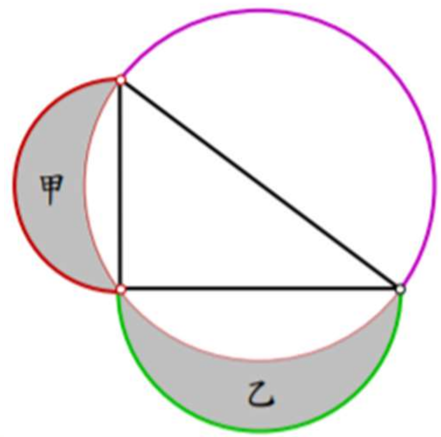


圖形問題

(3)希波克拉底斯（Hippocrates of Chios）新月形

新月形甲的面積＋新月形乙的面積
＝兩個小半圓的面積和－(大半圓面積－直角三角形面積)
＝直角三角形的面積

它意味著新月形的面積可以平方化，
也就是可以尺規作圖出一個正方形的面積恰
為新月形的面積。



畢氏定理之

補充

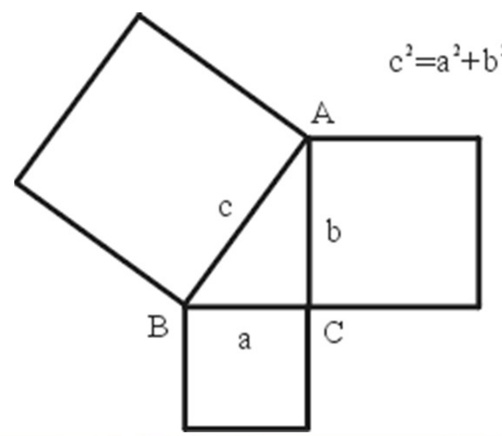
歐幾里得《幾何原本》與平行公設

《幾何原本》是人類文化史上一部非常偉大、有意義的著作，

它的主要結論其中之一即是畢氏定理：

- 畢氏定理

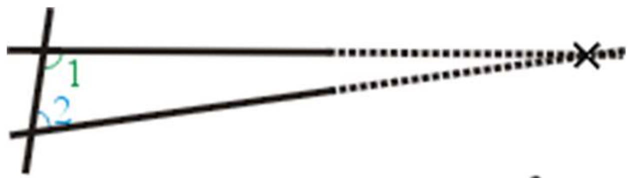
　　有一直角三角形 ABC，則長邊的平方會等於其他兩邊的平方和。
由幾何方面來說，如果我們在三邊上各作一個正方形，
那麼兩個小正方形的面積和就會等於大正方形的面積



歐幾里得《幾何原本》與平行公設

- 平行公理

有兩條直線被一直線所截，如果截角的和小於 180°，那麼這兩條直線在充分延長後，必相交於一點。



$\angle 1 + \angle 2 < 180^\circ$

另一個簡單的說法是：假使有一直線和線外一點， 那麼通過那個點就剛剛好只有一條直線和原來的直線平行(就是兩條直線不相交)

Thank you for the listening