數學思維與解題
組別：第六組
姓名：林子妘、詹喬予 洪苡甄、洪杏玟、許瑜芹
題目：數學歸納法

<u>數學歸納法的要點：</u>

這種方法的原理在於，首先證明在某個起點值時命題成立，然後證明從一個值到下一個值的過程有效。當這兩點都已經證明，那麼任意值都可以通過反覆使用這個方法推導出來。

1. 證明 n=1 時原式成立。
2. 若 k 是任意正整數，證明「若 n=k 時原式成立，則 n=k+1 時原式亦成立」。

最簡單和常見的數學歸納法是證明當 n 等於任意一個自然數時某命題成立。證明分下面兩步 (當證明物件已知為真時順序不相關)：

1. 明 「當 n= 1 時命題成立。」 選擇數字 1 因其作為自然數集合中中最小值
2. 證明 「若/假設在 n=m 時命題成立，可推理出在 n=m+1 時命題成立。（m 代表任意自然數）」

把這個方法想成多米諾骨牌效應更容易理解．例如：你有一列很長的直立著的多米諾骨牌，如果你可以：

1. 證明 「第一張骨牌會倒.」
2. 證明 「只要任意一張骨牌倒了，其下一張骨牌也會因為前面的骨牌倒而跟著倒。（現實中此假設根據試驗統計與理論模擬，其因果關係可在直覺上判定為真。）」

則可下結論：所有的骨牌都會倒下。在這個證明中，推理的過程如下：
首先證明命題 P(1)成立，即公式在 n= 1 時成立。
然後證明從命題 P（m） 成立可以推演出命題 P（m+1） 也成立。
根據上兩條從命題 P(1)成立可以推理出命題 P（1+1），也就是命題 P(2)成立。
繼續推理，可以知道命題 P（3）成立。
從命題 P(3)成立可以推導出命題 P(4)也成立。
不斷的重複推導下一命題成立的步驟。（這就是所謂「歸納」推理的地方）
我們便可以下結論：對於任意自然數 n，命題 P（n） 成立。

數學歸納法的例題：

- 第一數學歸納法

1.

例 1 （07 江西理 22）设正整数数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_2=4$，且对于任何 $n\in\mathbf{N}^*$，有

$$2+\frac{1}{a_{n+1}}<\frac{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}<2+\frac{1}{a_n}.$$

（1）求 a_1，a_3；　　（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n．

解：（1）据条件得 $2+\frac{1}{a_{n+1}}<n(n+1)\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)<2+\frac{1}{a_n}$　①　当 $n=1$ 时，

由 $2+\frac{1}{a_2}<2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)<2+\frac{1}{a_1}$，即有 $2+\frac{1}{4}<\frac{2}{a_1}+\frac{2}{4}<2+\frac{1}{a_1}$，解得 $\frac{2}{3}<a_1<\frac{8}{7}$．因为 a_1 为正整数，故

$a_1=1$．当 $n=2$ 时，由 $2+\frac{1}{a_3}<6\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{a_3}\right)<2+\frac{1}{4}$，解得 $8<a_3<10$，所以 $a_3=9$．

（2）由 $a_1=1$，$a_2=4$，$a_3=9$，猜想：$a_n=n^2$．下面用数学归纳法证明：

1° 当 $n=1$，2 时，由（1）知 $a_n=n^2$ 均成立；

2° 假设 $n=k(k\geqslant 2)$ 成立，$a_k=k^2$，则 $n=k+1$ 时由①得 $2+\frac{1}{a_{k+1}}<k(k+1)\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)<2+\frac{1}{k^2}$，

$\Rightarrow \frac{k^2(k+1)}{k^2-k+1}<a_{k+1}<\frac{k(k^2+k-1)}{k-1}\Rightarrow (k+1)^2-\frac{(k+1)^2}{k^2+1}<a_{k+1}<(k+1)^2+\frac{1}{k-1}$，因为 $k\geqslant 2$ 时，

$(k^2+1)-(k+1)^2=k(k+1)(k-2)\geqslant 0$，所以 $\frac{(k+1)^2}{k^2+1}\in(0,1]$．$k-1\geqslant 1$，所以 $\frac{1}{k-1}\in(0,1]$．

又 $a_{k+1}\in\mathbf{N}^*$，所以 $(k+1)^2\leqslant a_{k+1}\leqslant(k+1)^2$，故 $a_{k+1}=(k+1)^2$，即 $n=k+1$ 时，$a_n=n^2$ 成立．

由 1°，2° 知，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=n^2$．

此题在证明时应注意，归纳奠基需验证的初始值又两个，即 $n=1$ 和 $n=2$。

- 反向數學歸納法

2.

例 4 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数，证明：$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

证：（1）先证明有无限多个正整数 n，使命题成立. 当 $n=2^m$（对任意的 $m\in N^*,m\ge1$ 时），不等式成立，对 m 用数学归纳法.

① 当 $m=1$ 时，即 $n=2$，因为 $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\ge0$，所以 $\frac{a_1+a_2}{2}\ge\sqrt{a_1a_2}$ 即不等式成立.

② 假设 $m=k$ 时成立，即 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\ge\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}$；

则当 $m=k+1$ 时 $\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^k}\cdot a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}}}=\sqrt{\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}\cdot\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}}}}$

$\le\frac{\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}\cdots a_{2^{k+1}}}}{2}\le\frac{1}{2}(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}+\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k})$

$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+a_{2^k+2}\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}$.

因此 $m=k+1$ 时，不等式成立, 故对于 $n=2^m$（对任意的 $m\in N^*,m\ge1$ 时）命题成立.

（2）假定 $n=k$ 时成立，即 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\ge\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}$，于是当 $n=k-1$ 时，

有 $\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_{k-1}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}}{k}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}$ 对此式两边同时 k 次方得 $a_1a_2\cdots a_{k-1}\le(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1})^{k-1}$，即 $\sqrt[k-1]{a_1a_2\cdots a_{k-1}}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}{k-1}$ 成立，此为 $n=k-1$ 时不等式成立.

由（1）、（2）知对一切自然数 $n(n\ge1)$ 都有 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

3. n 屬於 N，f(n)=9^(n+1)-8n-9，試證 f(n)必為 64 之倍數。

<Sol>

n=1,f(1)= 81-8-9 =64

當 n=k 時，f(k)= 9^(k+1)-8k-9=64t

當 n=k+1 時，

f(k+1)= 9^(k+2)-8(k+1)-9

=9*9^(k+1)-8k-8-9

=[9^(k+1)-8k-9]+8*9^(k+1)-8

=64t+8[9^(k+1)-1]

=64t+8*(9-1)*[9^k+9^(k-1)+……..+1]

=64t+64[9^k+9^(k-1)+……..+1]

故得證

4. n 為正整數，1/2[10^(2n) + 5 × 12^n － 6]定為正質數 p 之倍數。

<Sol>

(1)推測 p 之值?

n=1, 1/2 (100+5×12 - 6)=11*7

n=2, 1/2 (10000+5×144 - 6)= 5357=11*487

p=11

(2)請以數學歸納法，證明(1)之結果。

當 n=k, 1/2[10^(2k) + 5 × 12^k － 6] = 11 t

當 n=k+1,

1/2[10^(2k+2) + 5 × 12^(k+1) － 6]

=1/2[100*10^(2k) + 12×5 × 12^k － 6]

=1/2[12*10^(2k) + 12×5 × 12^k － 6 +88*10^(2k)]

=12*(11t)+44*10^(2k)

=11[12*t+4*10^(2k)] 故得證

5. 對於所有的 n 屬於 N，2^(8n+1)-2^4n 之個位數字為 6。

<Sol>

n=1, 2^9-2^4=512-16=496

n=k, 2^(8k+1)-2^4k=10t+6(個位數字為 6)

n=k, 2^(8k+1+8)-2^(4k+4)

=256*2^(8k+1)-16*2^(4k)

=[255*2^(8k+1)-15*2^(4k)]+[10t+6]

255*2^(8k+1)必為 10 的倍數

15*2^(4k)也必為 10 的倍數

故得證

6.對於所有的 n 屬於 N，(n^5)/5+(n^4)/2+(n^3)/3-(n/30)必為自然數。

<Sol>

n=1,1/5 + 1/2 +1/3 – 1/30 =(6+15+10-1)/30=1

n=k, (k^5)/5+(k^4)/2+(k^3)/3-(k/30) = t (t 為自然數)

n=k+1,

(k+1)^5 /5+(k+1)^4 /2+(k+1)^3 /3-(k+1) /30

=(k^5 + 5 k^4 + 10 k^3 + 10 K^2 + 5k +1)/5

+(k^4+4 k^3+6 k^2+4 k+1)/2 + (k^3+3k^2+3k+1)/3 -(k+1)/30

=t+(5 k^4 + 10 k^3 + 10 K^2 + 5k +1)/5

+(4 k^3+6 k^2+4 k+1)/2 + (3k^2+3k+1)/3 -1/30

=t+(k^4 + 2k^3 + 2K^2 + k)+(2k^3+3k^2+2k)/2 + (k^2+k)/3

+[1/5+1/2+1/3 -1/30]

=t+(k^4 + 2k^3 + 2K^2 + k)+(2k^3+3k^2+2k)/2 + (k^2+k)/3+1

故得證

6. 比較 2^n 與 n^2 之大小，並將其結果，以數學歸納法證明之。

<Sol>

2^1>1^2

2^2=2^2 2^3<3^2 2^4=4^2 2^5>5^2 2^6>6^2

所以當 n>4， 2^n>n^2

n=k ， 2^k > k^2 (k>4)

n=k+1，

左式 2^(k+1)=2*2^k 右式(k+1)^2=k^2+2k+1

2*2^k- (k^2+2k+1)=(2^k- k^2)+ [2^k- (2k+1)]

因為 2^k> k^2

所以 2^k- (2k+1)> k^2- (2k+1)= (k^2- 2k+1)-2=(k-1)^2-2

k>4，(k-1)^2-2>0

所以 2*2^k- (k^2+2k+1)=(2^k- k^2)+ [2^k- (2k+1)]>0

故得證

7. n 為任意正整數，且 a_1，a_2，a_3，...，a_n 均為正數 ，試證:$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_n)\geq 1+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$。

<Sol>

$n=1$ ， $1+a_1=1+a_1$ (合)

$n=2$ ， $(1+a_1)(1+a_2)=1+a_1+a_2+a_1a_2>1+a_1+a_2$(合)

設 $n=k$ 亦合，則

$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_k)\geq 1+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k$

$n=k+1$

$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1})$

$=[(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_k)]+[(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_k)]a_{k+1}$

$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_k)\geq 1+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k$

又$[(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_k)]\geq 1$

所以$[(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_k)]a_{k+1}>a_{k+1}$

$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_k)(1+a_{k+1})\geq 1+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k+a_{k+1}$

故得證

8. 證明：對所有正整數 以下不等式皆成立。

<Sol>

$$\log_{10} 2 \le \log_{10}(n+1) - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \log_{10} k\right) \le \log_{10} 3.$$

原式與 $\log_{10} 2 \le \log_{10} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \le \log_{10} 3$ 相同

或與 $\left(\frac{n+1}{3}\right)^n \le n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ 相同

(a)利用算n不等式

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n} \ge \sqrt[n]{n!}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \ge n! \text{ 成立}$$

(b)用歸納法證：

$$n! \ge \left(\frac{n+1}{3}\right)^n$$

(i) $n=1$ $\quad 1 \ge \frac{2}{3}$

(ii)設$n=k$時：$k! \ge \left(\frac{k+1}{3}\right)^k$

則$n=k+1$時

$$(k+1)! = (k+1)\cdot k! \ge (k+1)\cdot\left(\frac{k+1}{3}\right)^k = \frac{(k+1)^{k+1}}{3^k}$$

只需說明 $\frac{(k+1)^{k+1}}{3^k} \ge \frac{(k+2)^{k+1}}{3^{k+1}}$ 即可

但此式與 $3 \ge \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$ 相同

再由$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \cdots + \frac{m!}{m!}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^m$

$$\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{m(m-1)} < 3$$

可知$\frac{(k+1)^{k+1}}{3^k} \ge \left(\frac{k+2}{3}\right)^{k+1}$ $\quad \therefore n=k+1$時也成立

$$\therefore n! > \left(\frac{n+1}{3}\right)^n$$

不適合用數學歸納法的情況

Claim：任何兩匹馬顏色都是相同的

Fact：兩匹馬顏色是相同的

By Induction

Basic Step：n=2 的時候成立

Inductive Step：假設 n>=2，並且對於 n=x 是成立的，那麼對於 n=x+1 因為此時 x 匹馬的顏色是相同的，因此 x1 到 xn 的顏色是相同的，x2 到 x(n+1) 的顏色是相同的。並且由於 n>=2，兩個集合之間肯定有交集。根據等價關係的性質，x 和 x(n+1) 的顏色也是相同的，因此 n+1 匹馬的顏色是相同的。

對於任意的 n，n 匹馬的顏色是相同的。

Fact：世界上的馬的個數是某個自然數 m。

m 匹馬的顏色是相同的。

因此所有馬的顏色是相同的。

1. n=1 時這個證明過程不成立，n>=2 才可成立。
2. 從 x=1 的情況無法推出 x=2 的情況
3. 他只假設了 n 匹馬是同一種顏色，僅僅是從 1 開始算的時候，不代表 n 大於等於 2 的時候假設也能成立
4. 設 x=n 時有 n 匹馬為同一種顏色，當 x=n+1 時
   (1)只能得到:在 n＋1 匹馬中存在 n 匹馬為同一種顏色。
   (2)不能得到:在 n＋1 匹馬中任取 n 匹馬為同一種顏色。
   所以當你以某一種方式取其中 n 匹馬時，不能保證顏色相同。

結論：

皮亞諾公理(Peano Axioms)視數學歸納法不證自明，設作公理，而於策梅洛-弗蘭克爾集合論，數學歸納法可從良序定理（well-ordering theorem）推導出來。而需要注意的是數學歸納法只能判定給定命題的真，而不能證偽，因為在形式變換這一過程需要一定技巧與靈感。抽象的概念如自然數，可通過抽象的工具去處理。通過有限的步驟處理無限的物件如證明質數的無窮。

參考資料

出處:

https://m.xuite.net/blog/wang620628/twblog/126094843

https://drive.google.com/file/d/0BziZx_DOVjhoaDNFdGNXay1PTGM/view?usp=sharing

https://www.getit01.com/p2017120343242/

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_06_4_01/page2.html

https://wenku.baidu.com/view/7f35b7a1aff8941ea76e58fafab069dc502247da

https://zh.wikipedia.org/wiki/数学归纳法