古爾丁定理

組員：

黃柏勳410931114

陳舜佑410931138

張文志410931115

劉康昱410931111

旋轉示意圖：

Pappus–Guldinus theorem

(帕普斯–古爾丁定理)

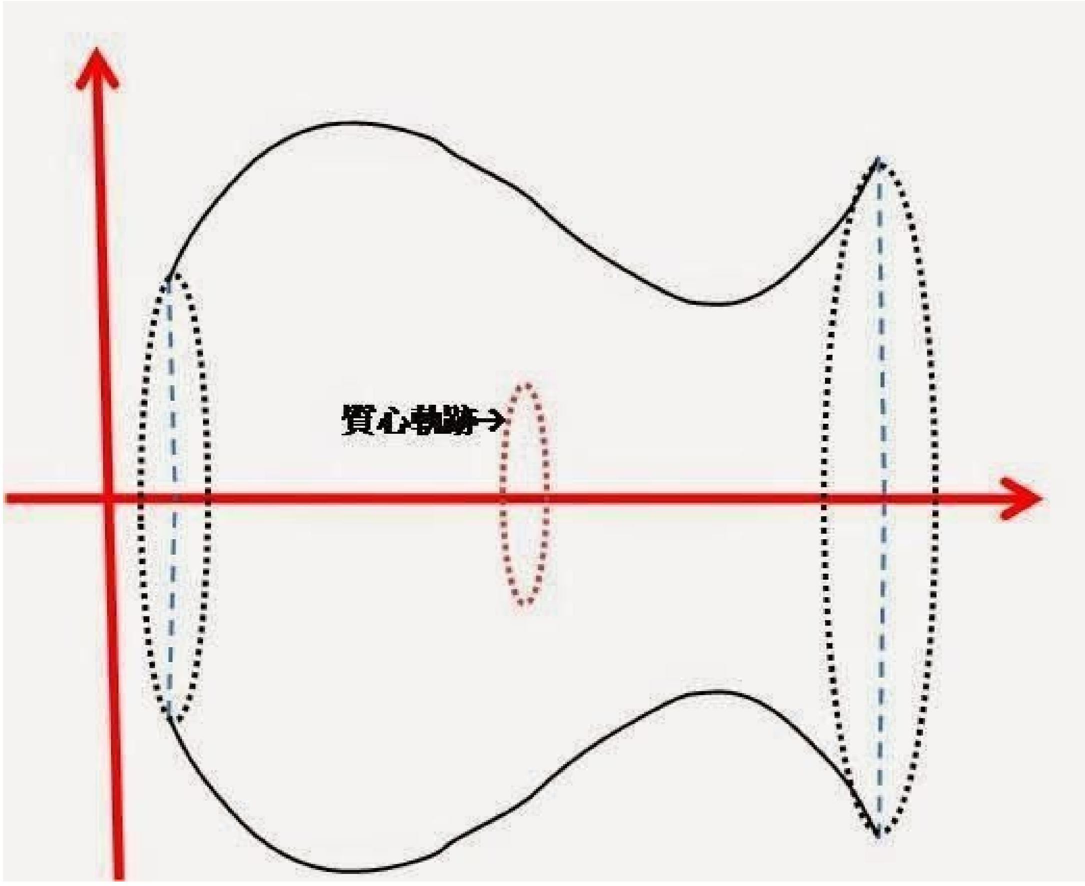
一、*定義*

Pappus–Guldinus theorem，中文譯作帕普斯–古爾丁定理。以下簡稱為古爾丁定理 (為避免和幾何的帕普斯定理混淆)

。

古爾丁定理說:

一個平面圖形繞著軸旋轉出的旋轉體體積，恰等於此圖形面積乘以此圖形質心所走路徑長。



二、證明：

先備定理：

1. $y=f(x), a \le x \le b$,這段曲線以及$x=a, x=b$, x軸為成一個圖形
   此圖形繞 x軸旋轉的旋轉體體積：
   $$V=\int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx$$
2. 平面圖形重心座標：
   $$\left(x_{CM}, y_{CM}\right)=\left(\frac{\iint x dA}{\iint dA}, \frac{\iint y dA}{\iint dA}\right)$$
3. $y=f(x), a \le x \le b$,與 x軸圍出面積
   $$A=\int_a^b f(x) dx$$

正式開始證明：

質心路徑長

$$= 2\pi \cdot y_{CM}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\int_a^b \int_0^{f(x)} y\,dy\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\int_a^b \left. \frac{1}{2} y^2 \right|_{y=0}^{f(x)} dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$= \pi \cdot \frac{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

旋轉體體積

$$= \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2\,dx$$

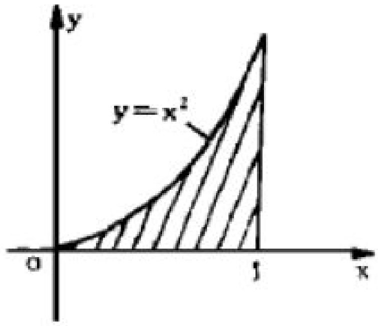
圖形面積

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

相乘即得此定理之結果

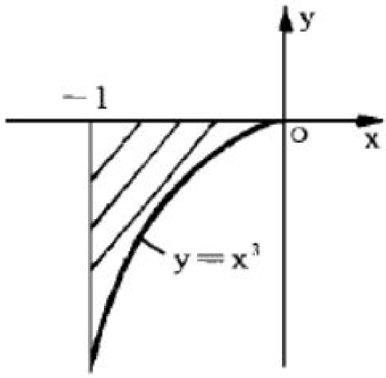
三、题目講解

(1) $y=x^2$ 和 x 轴、$x=1$ 所围图形，绕 y 轴



解：

$$V=\int_0^1 2\pi x\cdot x^2dx=2\pi\int_0^1 x^3dx=2\pi\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

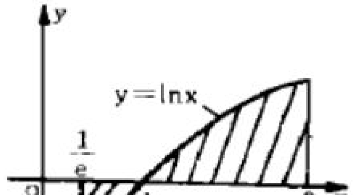


(2) $y=x^3$ 和 x 轴、$x=-1$ 所围图形，绕 y 轴

解：

$$V=\int_{-1}^0 2\pi|x||x^3|dx=\int_{-1}^0 2\pi(-x)(-x^3)dx=\int_{-1}^0 2\pi x^4dx=2\pi\frac{x^6}{5}\Big|_{-1}^0=\frac{2}{5}\pi$$

(3) $y=\ln x$，$x_1=e^{-1}$，$x_2=e$ 和 x 轴所围图形绕 y 轴



解：

$$V=\int_{e^{-1}}^{e}2\mathrm{c}x\,|\ln x|\,dx=\int_{e^{-1}}^{1}2\mathrm{c}x(-\ln x)\,dx+\int_{1}^{e}2\mathrm{c}x\ln x\,dx$$

$$=-2\mathrm{c}\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{e^{-1}}^{1}+2\mathrm{c}\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{1}^{e}=\mathrm{c}\left(1+\frac{e^2}{2}-\frac{3}{2}e^{-1}\right)$$

解： (4) $y=x^2$和 $y=2-x^2$所围图形,绕 x轴 .

$$V = 2\int_0^1 2^{c} x\left[(2-x^2)-x^2\right]dx = 4^{c}\int_0^1 x(2-2x^2)\,dx = 4^{c}\left(x^2-\frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^1 = 2^{c}$$