古爾丁定理

組員:
黃柏勳 410931114
陳舜佑 410931138
張文志 410931115
劉康昱 410931111

Pappus–Guldinus theorem
（帕普斯—古爾丁定理）

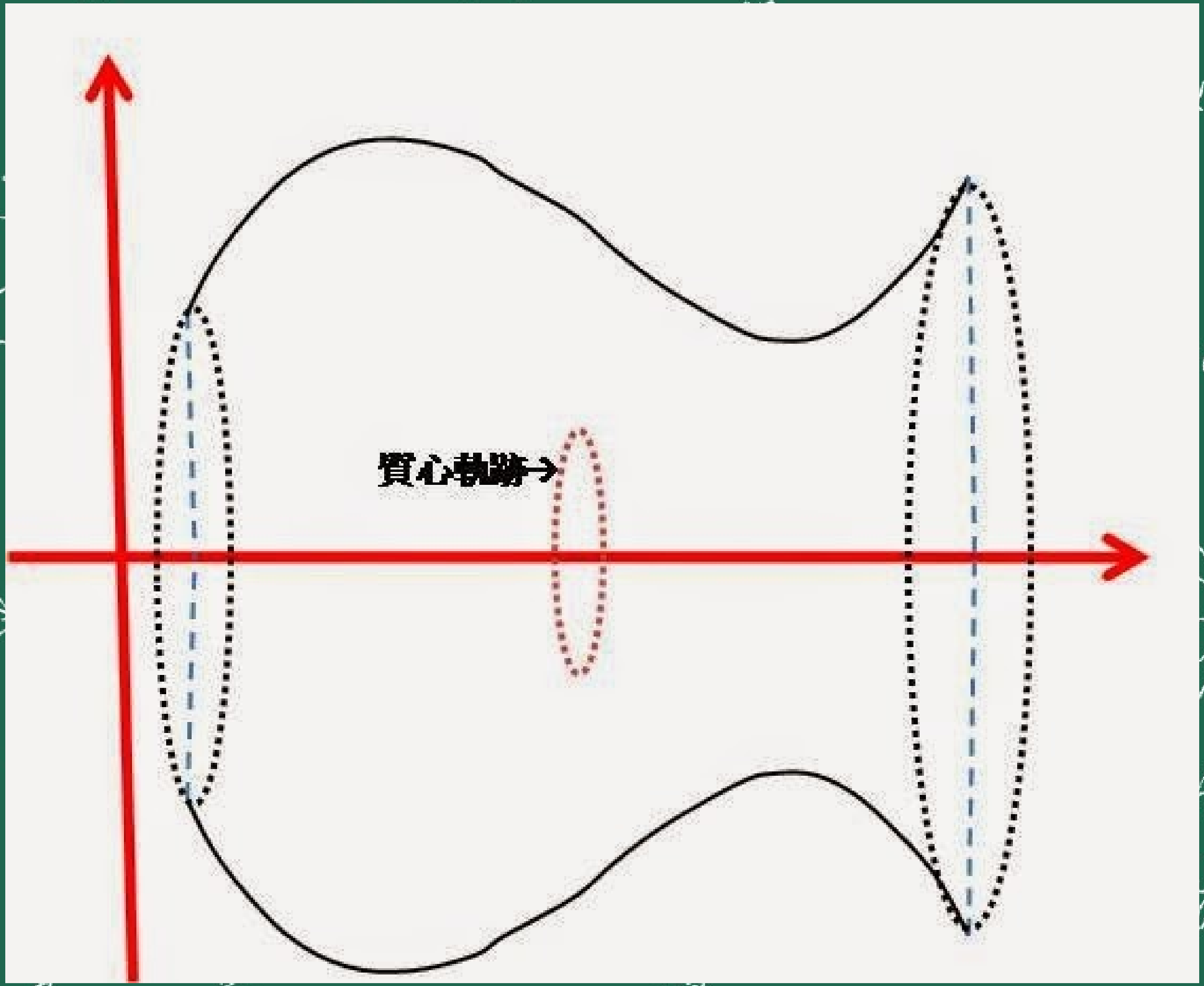
一、*定義*

Pappus–Guldinus theorem ，中文譯作帕普斯—古爾丁定理。以下簡稱為古爾丁定理（為避免和幾何的帕普斯定理混淆）。

古爾丁定理說：

一個平面圖形繞著軸旋轉出的旋轉體體積，恰等於此圖形面積乘以此圖形質心所走路徑長。

旋轉示意圖：



二、證明：

先備定理：

1. $y=f(x), a\le x\le b$,這段曲線以及$x=a, x=b$, x軸為成一個圖形

   此圖形繞 x軸旋轉的旋轉體體積：

   $$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

2. 平面圖形重心座標：

   $$(x_{CM}, y_{CM})=\left(\frac{\iint x dA}{\iint dA}, \frac{\iint y dA}{\iint dA}\right)$$

3. $y=f(x), a\le x\le b$,與 x軸圍出面積

   $$A=\int_a^b f(x)dx$$

正式開始證明：

質心路徑長

$$= 2\pi \cdot y_{CM}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\int_a^b \int_0^{f(x)} y\,dy\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{\int_a^b \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=0}^{f(x)} dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$= \pi \cdot \frac{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

圖形面積

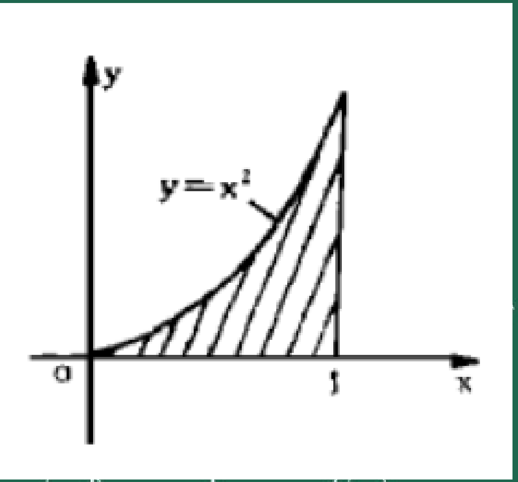
$$=\int_a^b f(x)dx$$

旋轉體體積

$$=\int_a^b \pi\cdot[f(x)]^2dx$$

三、題目講解

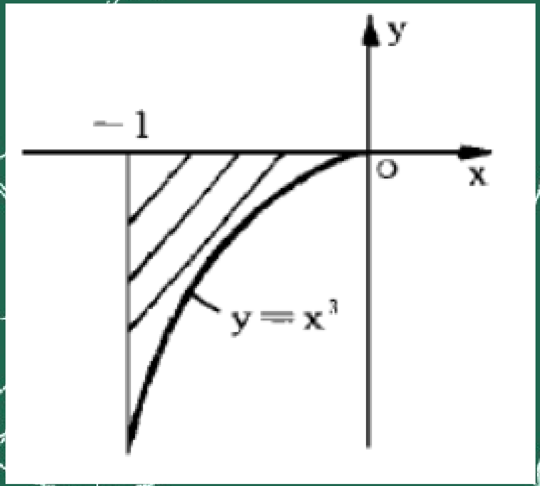
(1) $y=x^2$和 x轴、$x=1$所围图形，绕 y轴



解：

$$V=\int_0^1 2\pi x\cdot x^2dx=2\pi\int_0^1 x^3dx=2\pi\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

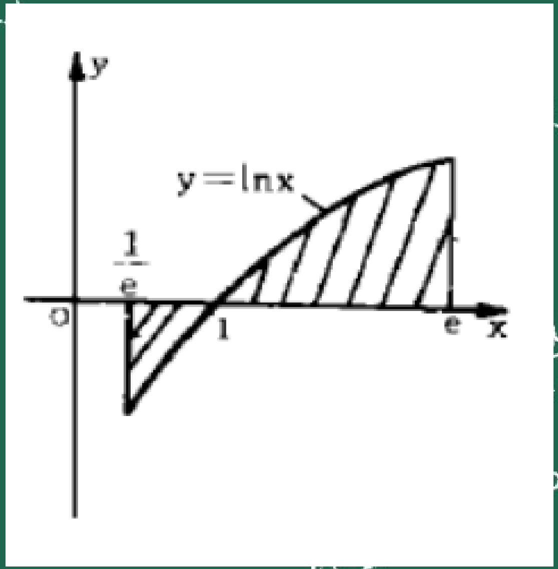
(2) $y = x^3$ 和 x轴、$x = -1$ 所围图形，绕 y 轴



解：

$$V=\int_{-1}^{0}2c|x||x^3|\,dx=\int_{-1}^{0}2c(-x)(-x^3)\,dx=\int_{-1}^{0}2cx^4\,dx=2c\frac{x^6}{5}\Big|_{-1}^{0}=\frac{2}{5}c$$

$x_1 = e^{-1}, x_2 = e$ 和 x 轴所围图形绕 y 轴

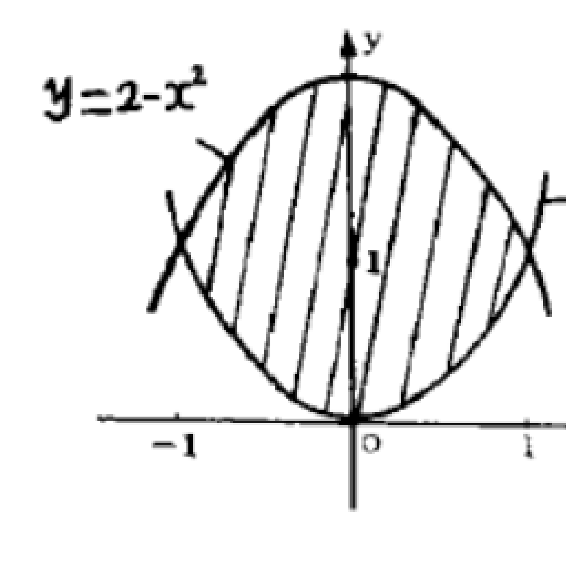


解:

$$V = \int_{e^{-1}}^{e} 2c x \left| \ln x \right| dx = \int_{e^{-1}}^{1} 2c x (-\ln x) dx + \int_{1}^{e} 2c x \ln x dx$$

$$= -2c\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{e^{-1}}^{1} + 2c\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{1}^{e} = c\left(1 + \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}e^{-1}\right)$$

(4) $y=x^2$和 $y=2-x^2$所围图形,绕 x轴.



解：

$$V=2\int_0^1 2\pi x[(2-x^2)-x^2]dx=4\pi\int_0^1 x(2-2x^2)dx=4\pi(x^2-\frac{1}{2}x^4)\Big|_0^1$$

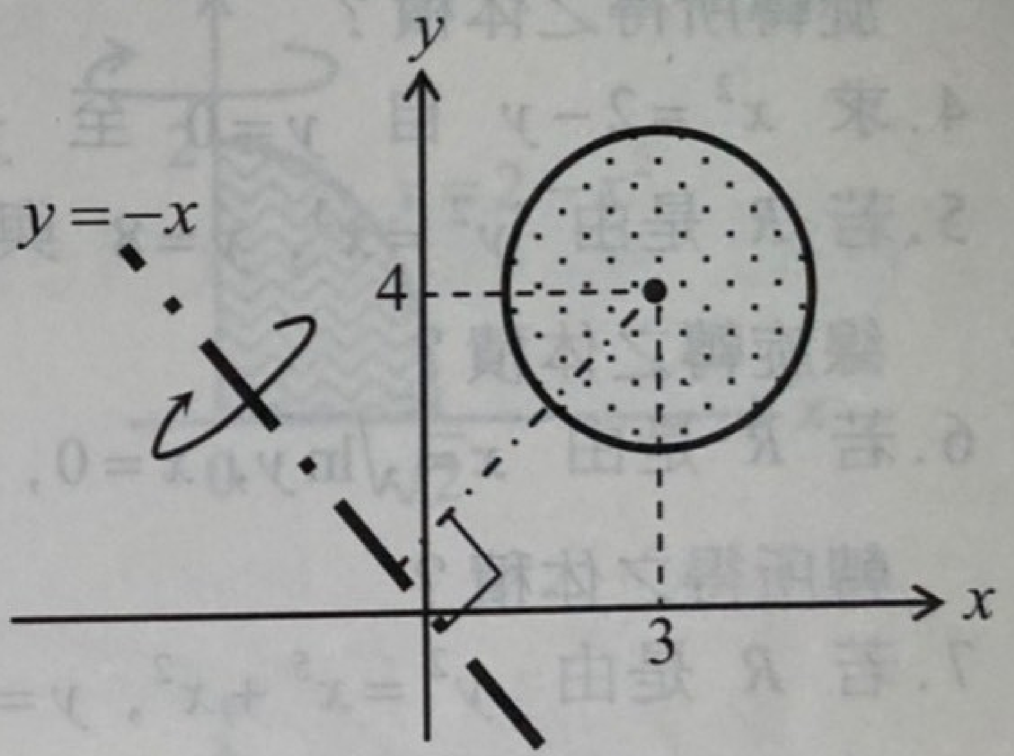
說例 9 漂亮題	求圓 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 繞直線 $y=-x$ 一圈所得之旋轉体体積？ (中興轉)

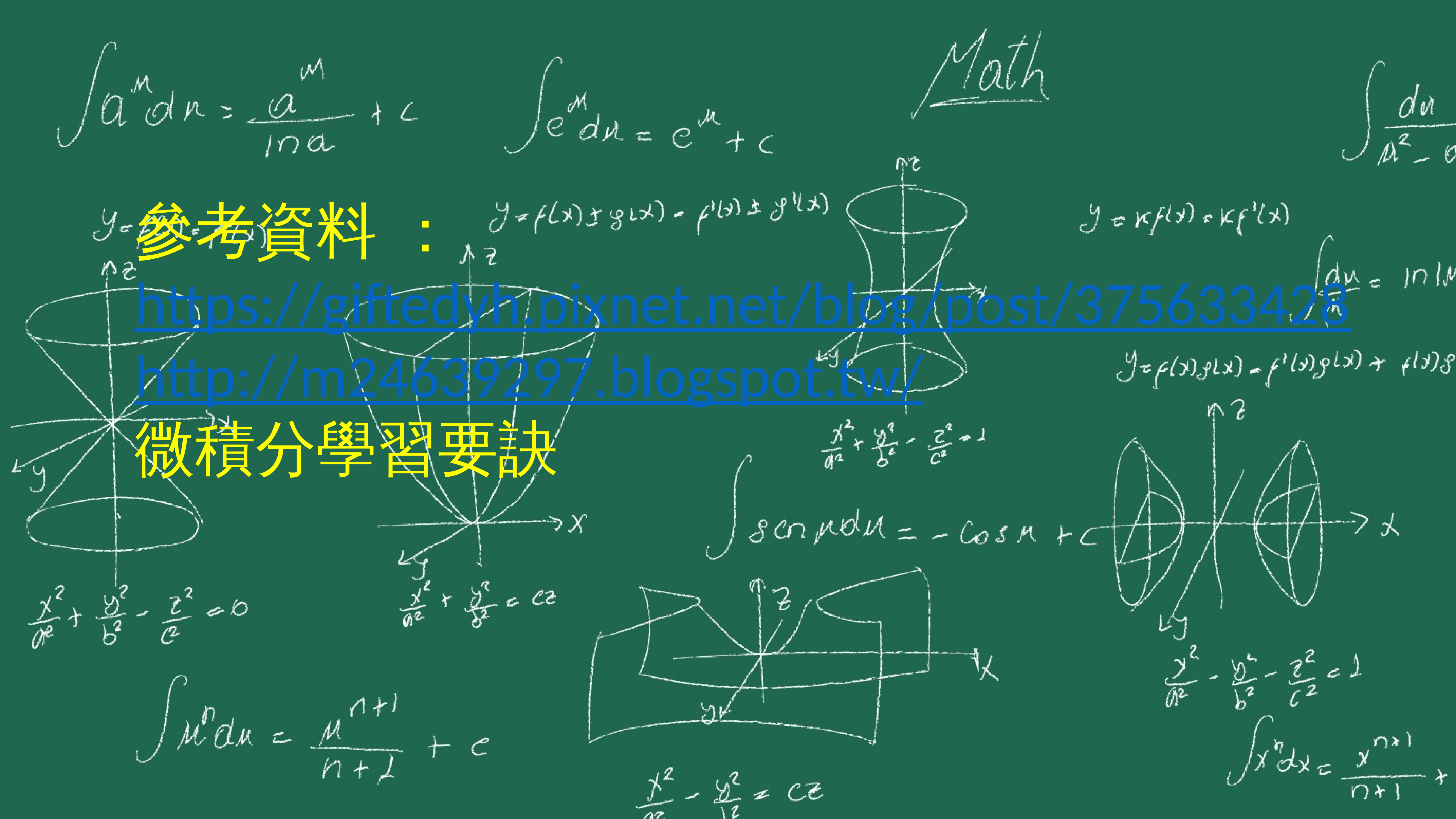
[解]先求圓心 (3,4) 到 $y=-x$ 之距離

得 $d=\dfrac{|3+4|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{7}{\sqrt{2}}$

利用 Pappus 定理得

$V=(\pi\cdot 2^2)\cdot\left(2\pi\cdot\dfrac{7}{\sqrt{2}}\right)=28\sqrt{2}\pi^2$ 。





參考資料 ：

https://giftedyh.pixnet.net/blog/post/375633428

http://m24639297.blogspot.tw/

微積分學習要訣