數學解題期末報告

組別:第五組

主題:離散 圖形理論

組員:余仕弘 陳冠豪 史雲天 計宇璠 曾泓鈞

壹、前言

圖論（英語：graph theory），是組合數學分支，和其他數學分支，如群論、矩陣論、拓撲學有著密切關係。圖是圖論的主要研究對象。圖是由若干給定的頂點及連接兩頂點的邊所構成的圖形，這種圖形通常用來描述某些事物之間的某種特定關係。頂點用於代表事物，連接兩頂點的邊則用於表示兩個事物間具有這種關係。

貳、大綱

我們大致分為五個部分來做介紹,分別為圖的基本術語介紹、尤拉迴路/漢米爾頓迴圈、圖的連通和著色、圖的重要類型、樹和森林

叁、內容簡介

●圖的基本性質和術語:

介紹圖:簡單來說，一般提到的圖，由一些點和一些連 接兩相異點的邊構成。圖常是用來描述物件與物件的二元關係。

為了避免模稜兩可，精準而言，上述定義的圖要加上兩個形容詞「無向」和「簡單」，這是因為還有很多種變種的圖。

圖的基本性質:

1.點數、邊數：點集和邊集的元素數量。點數又　稱為「階」（order）

2. 無向圖,有向圖,多重圖,偽圖

點、邊的特性:

1.權重（weight）

2.度（degree）

點、邊之間的關係

1.相鄰（adjacent）

2.指向（consecutive）

3.路徑（path)

4. 行跡、迴路（trace, circuit）

5. 簡單路徑、環（track, cycle）

6.連通（connected）

柯尼斯堡七橋問題:這個問題是基於一個現實生活中的事例：當時東普魯士柯尼斯堡（今日俄羅斯加里寧格勒）市區跨普列戈利亞河兩岸，河中心有兩個小島。小島與河的兩岸有七條橋連接。在所有橋都只能走一遍的前提下，如何才能把這個地方所有的橋都走遍？

●尤拉迴路/漢米爾頓迴圈

A. 尤拉路徑 及 尤拉迴路 (Eulerian Path, Eulerian Circuit)

I. 基本概念

所謂的尤拉路徑(Eulerian Path) 是指一條經過圖中每一條邊皆恰好一次的路徑，尤拉迴路(Eulerian Circuit)則是一條起點與終點重合的尤拉路徑，若存在這樣的一個 Cycle，則該圖被稱為 Eulerian 或 unicursal。

II. 性質

1. 尤拉路徑：

a.如果是無向圖，則它要是連通的而且最多只能有兩個奇數分支度的點。

b.如果是有向圖，則只有在恰好有一個點入分支度比出分支度多一、有一個點出分 支度比入分支度多一時，或者是所有的點的出分支度皆等於入分支度時，該圖才 存在尤拉路徑，當然，該圖必須連通。

2. 尤拉迴路：

a.如果是無向圖，則它要是連通的而且圖中每一個頂點的分支度都必須是偶數。

b.如果是有向圖，則必須要連通且所有點的出分支度皆等於入分支度。

B. 漢米頓路徑 及 漢米頓迴路 (Hamiltonian Path, Hamiltonian Circuit)

I. 基本概念

漢米頓迴路 (Hamiltonian Circuit) 的定義與尤拉迴路十分的相像，只是漢米頓迴路是指 一個經過圖中每一個「頂點」皆恰好一次(除了起點與終點必相同)的迴圈(Cycle)，類似地，漢米頓路徑 (Hamiltonian Path)的部分也是一樣的。 但是，詢問一張圖是否存在著漢米頓路徑或迴圈是 NP-Complete 的。 若一張圖包含一條漢米頓路徑，則我們稱該圖為 traceable graph，而若一張圖包含一個 漢米頓迴路，則我們稱該圖為 Hamiltonian graph。

II. 性質

a.一個頂點數目超過 2 的完全圖必存在一條漢米頓迴路 (Hamiltonian Circuit)。

b.一完全圖中共有$(n-1)!/2$ 條相異的漢米頓迴路。

●圖的連通和著色

I.定義

單來說，在一個無向圖 G 中，若從頂點 Vi 到頂點 Vj 有路徑相連（當然從 Vi 到 Vj 也一定有路徑），則稱 Vi 和 Vj 是連通的。

如果 G 是有向圖，那麼連接 Vi 和 Vj 的路徑中所有的邊都必須同向。如果圖中任意兩點都是連通的，那麼圖被稱作**連通圖**。

II.著色問題

給定一個無向圖 $G= (V,E)$，其 V 為頂點集合，E 為集合，圖著色問題即為將 V 分為 K 個顏色組，每個組形成一個獨立集，即其中沒有相鄰的頂點。
其優化版本是希望獲得最小的 K 值。

III.相關術語

a.圖色數

b.邊色數

vI.**色多項式**

將一個圖 G 進行 t-著色的方法數，記作 $P(G,t)$。$P(G,t)$是關於 t 的多項式，假設 G 的階數為 n，則 $P(G,t)$滿足如下性質：

首項係數為 1；

n-1 次項係數等於-|E(G)|；

0 次項係數等於 0；

各項係數正負交替；

一次項係數不為零若且唯若 G 連通。

色多項式包含了 G 是否能進行 t-著色的信息，即可以根據色多項式確定 G 的色數。

二者具有如下關係：X(G)=min{k:P(G,k)>0}

範例 1: 三角形 K_3 x (x-1) (x-2)

範例 2: 完全圖 K_n x (x-1) (x-2)...(x-(n-1))

●圖的重要類型:

圖的類型很多，且大量應用在數學上，對當代數學的影響很深，簡單介紹幾個著名的圖來作探討，樹狀圖,完全圖,連通圖以及補圖。帶大家了解這些圖背後的理論，也介紹幾個這些圖的應用。

樹狀圖:樹狀圖是一種將階層式的構造性質，以圖象方式表現出來的方法。

它是一個上下顛倒的樹，其根部在上方，是資料的開頭，而下方的資料稱為葉子。 一個樹形結構的外層和內層有相似的結構，所以，這種結構多可以遞迴的表示。

完全圖:圖形中任何一對頂點都是相鄰的。有 n 個頂點的無向完全圖會有: n(n-1)/2 個無向邊有 n 個頂點的有向完全圖會有:n(n-1)個有向邊

連通圖:圖形中任何一對不同頂點之間都有路徑可以連通。強連通圖: 任一對頂點之間都有路徑互通。有分為強連通跟弱連通，連通度分為點連通度跟邊連通度。

補圖:一個圖的補圖（complement）或者反面（inverse）是一個圖有著跟 G 相同的點，而且這些點之間有邊相連若且唯若在 G 裡面他們沒有邊相連

●樹與森林(Tree and Forest)

I.基本概念

在計算機科學中，**樹**是一種抽象資料類型（ADT）或是實作這種抽象資料類型的資料結構，用來類比具有樹狀結構性質的資料集合。它是由 n（n>0）個有限節點組成一個具有層次關係的集合。把它叫做「樹」是因為它看起來像一棵倒掛的樹，也就是說它是根朝上，而葉朝下的。

II.性質

（a）每個節點都只有有限個子節點或無子節點

（b）沒有父節點的節點稱為根節點

（c）每一個非根節點有且只有一個父節點

（d）除了根節點外，每個子節點可以分為多個不相交的子樹

（e）樹裡面沒有環路(cycle)

（f）m(M>=0)棵樹(Tree)合起來就稱為森林(Forest)

資料來源

(維基百科-圖論)https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%BE%E8%AE%BA

(建中資訊科校內培訓講義)http://pisces.ck.tp.edu.tw/~peng/index.php?action=showfile&file=f0b00e42978035a90f533cc2421cff2c19e41bb55

https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%A0%91_(%E6%95%B0%E6%8D%AE%E7%BB%93%E6%9E%84) (維基百科-樹與森林)

(維基百科-樹狀結構)https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A8%B9%E7%8B%80%E7%B5%90%E6%A7%8B

(維基百科-完全圖)https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%AE%8C%E5%85%A8%E5%9C%96

(維基百科-連通圖)https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%BF%9E%E9%80%9A%E5%9B%BE

(圖的點連通度邊連通度總結)https://codertw.com/%E7%A8%8B%E5%BC%8F%E8%AA%9E%E8%A8%80/562640/

([Data Structure][Graph]–Theory)https://ithelp.ithome.com.tw/articles/10203520https://z

h.wikipedia.org/wiki/%E8%A3%9C%E5%9C%96
https://tioj.ck.tp.edu.tw/uploads/attachment/5/13/3.pdf

(維基百科-圖論術語)**https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E5%9B%BE%E8%AE%BA%E6%9C%AF%E8%AF%AD**

(維基百科-圖著色問題)https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%BE%E7%9D%80%E8%89%B2%E9%97%AE%E9%A2%98