離散 圖形理論

第五組 組員:余仕弘 陳冠豪 史雲天 計宇璠 曾泓鈞

圖的基本介紹和術語

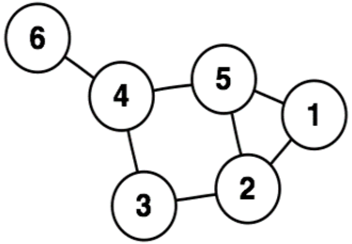
簡單來說，一般提到的圖，**由一些點和一些連接兩相異點的邊構成**。邊是一個包含兩點的集合，通常寫為 $e_i = \{v_i , v_j\}(v_i \neq v_j ; v_i , v_j \in V)$，$v_i , v_j$ 分別代表邊的端點。如此，一個圖便可以表示為 (V, E)，其中 V 是點的集合，E 是邊的集合。可以看出來，**圖常是用來描述物件與物件的二元關係**。

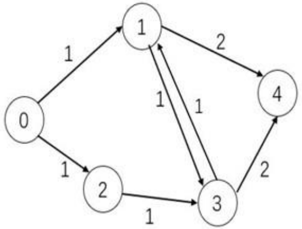
為了避免模稜兩可，精準而言，上述定義的圖要加上兩個形容詞「**無向**」和「**簡單**」，這是因為還有很多種變種的圖。(圖論初階 Yihda Yol)

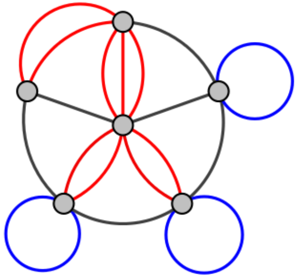
圖的基本性質

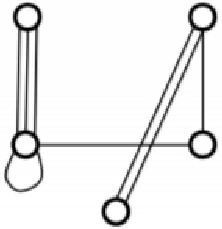
1.點數、邊數：點集和邊集的元素數量。點數又稱為「階」（order）。(圖論初階 Yihda Yol)

2. 無向圖　有向圖　多重圖　偽圖





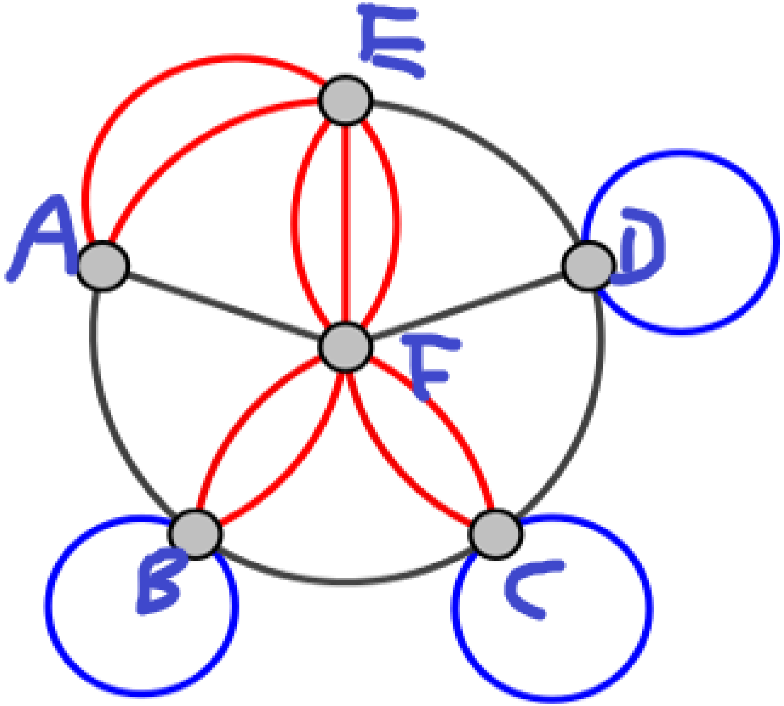




點、邊的特性:

1.權重（weight）:有時候我們會在每一個點和邊附帶一個數稱為「權重」。比較常見的是邊的權重，通常會作為表達長度的方法。

2.度（degree）：一個點的度，等於連接這個點的邊數；一個圖的度，等於這個圖中度數最大的點的度。在有向圖中，還可以分為出度和入度（in-degree, out-degree），分別等於將某一點作為起點的邊數、和作為終點的邊數。（特別地，在偽圖當中，自環的度數要算兩次。）(圖論初階 Yihda Yol)



我們來看這張圖每個點的度數:

A:2+2=4

B:2+2+2=6

C:2+2+2=6

D:3+2=5

E:5+1=6

F:7+2=9(MAX)

圖=9

點、邊之間的關係：

1.相鄰（ adjacent ）：在無向圖當中，若有一條邊連接兩點 {vi , vj}，稱這兩點相鄰。若有一 個點被兩個邊 ei , ej 連接，我們稱這兩個邊相鄰。

2.指向（ consecutive ）：任何一條有向圖的邊都從其起點「指向」終點。另外，如果我們稱 點 vi 指向 vj，代表存在 (vi , vj) 這一條邊。

3.路徑（ path ）：一條由點 A 到點 B 的路徑，記為 P(A, B)，指的是一個點邊交錯的序列。也可以看成是一連串經由指向關係連結起來的點。(圖論初階 Yihda Yol)

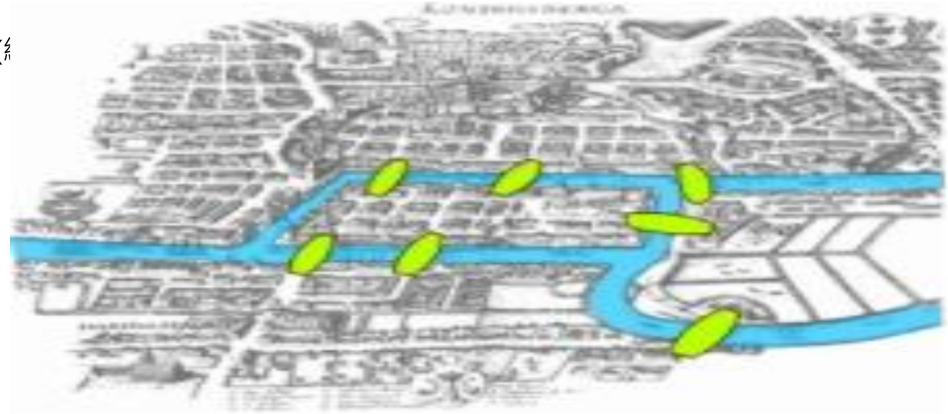
4.行跡、迴路（trace, circuit）：如果一條路徑中 e0, e1, · · · , ek−1 兩兩相異，稱這個路徑為 行跡；行跡的起終點相同，則稱為迴路。

5.簡單路徑、環（track, cycle）：如果一條路徑中 v0, v1, · · · , vk，除了 v0, vk 以外皆兩兩相 異，稱這個路徑為「簡單路徑」。簡單路徑的起終點相同，則稱為環。

6.連通（connected）：在無向圖中，如果 vi 到 vj 的路徑存在，稱 vi 和 vj 連通。如果一群點兩兩連通，則稱這一群點連通。(圖論初階 Yihda Yol)

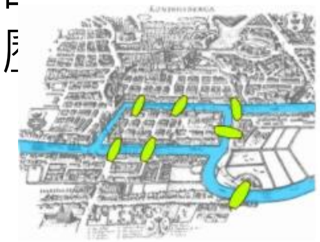
關於圖的著名問題:

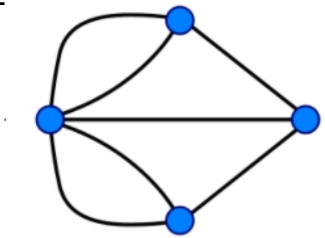
柯尼斯堡七橋問題:這個問題是基於一個現實生活中的事例：當時東普魯士柯尼斯堡（今日俄羅斯加里寧格勒）市區跨普列戈利亞河兩岸，河中心有兩個小島。小島與河的兩岸有七條橋連接。在所有橋都只能走一遍的前提下，如何才能把這個地方所有的橋都走遍？(



解決方法:不存在!!

歐拉在1735年提出，並沒有方法能圓滿解決這個問題，他更在第二年發表在論文《柯尼斯堡的七橋》中，證明符合條件的走法並不存在，也順帶提出和解決了一筆畫問題。這篇論文在聖彼得堡科學院發表，成為圖論史上第一篇重要文獻。歐拉把實際的抽象問題簡化為平面上的點與線組合，每一座橋視為一條線，橋所連接的地區視為點。這樣若從某點出發後最後再回到這點，則這一點的線數必須是偶數，這樣的點稱為偶頂點。相對的，連有奇數條線的點稱為奇頂點。歐拉論述了，由於柯尼斯堡七橋問題中存在4個奇頂點，它無法實現符合題意的遍



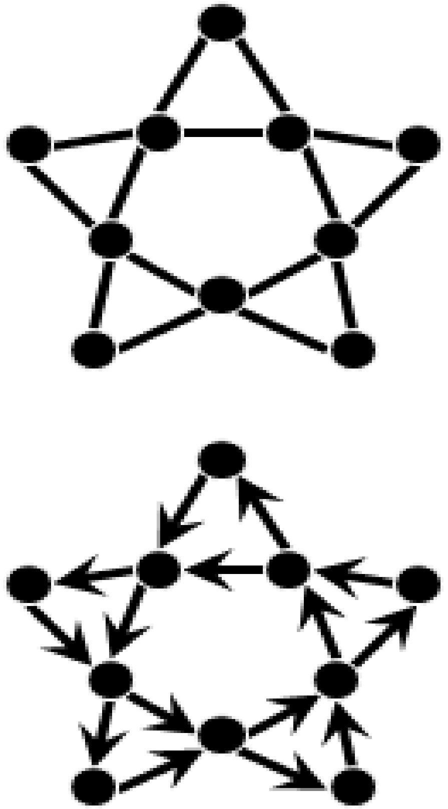
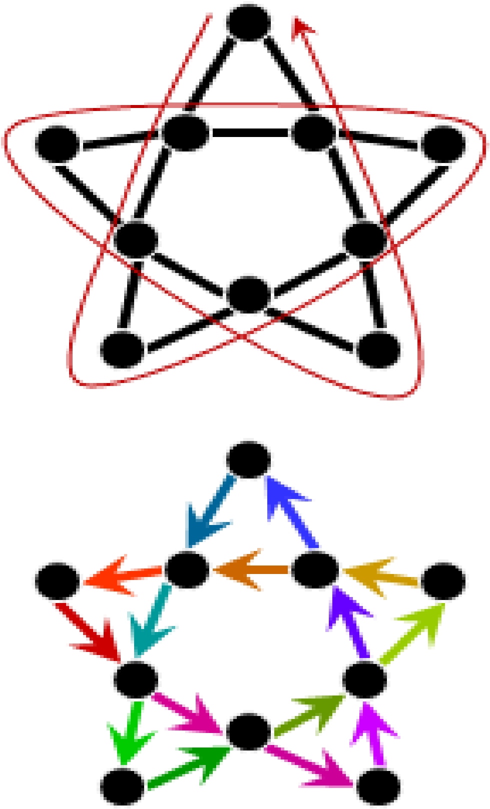
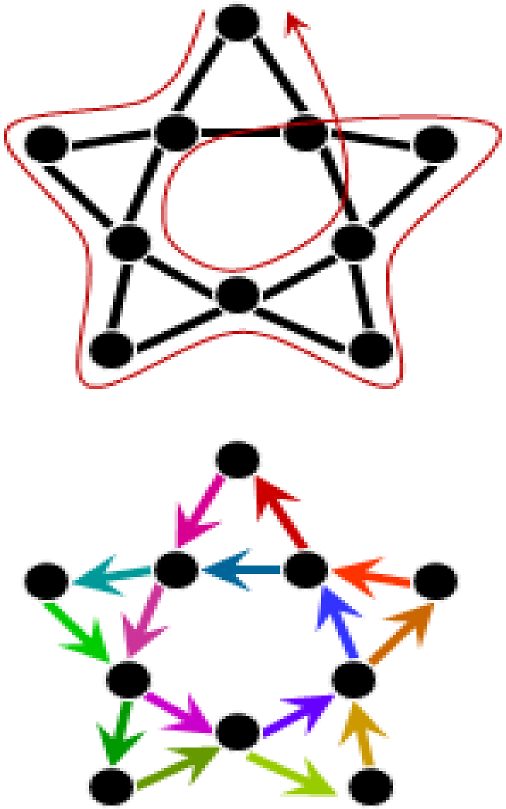


歐拉把問題的實質歸於一筆畫問題，即判斷一個圖是否能夠遍歷完所有的邊而沒有重複，而柯尼斯堡七橋問題則是一筆畫問題的一個具體情境。歐拉最後給出任意一種河——橋圖能否全部走一次的判定法則，從而解決了「一筆畫問題」。不少數學家都嘗試去解析這類事例。而這些解析，最後發展成為了數學中的圖論。

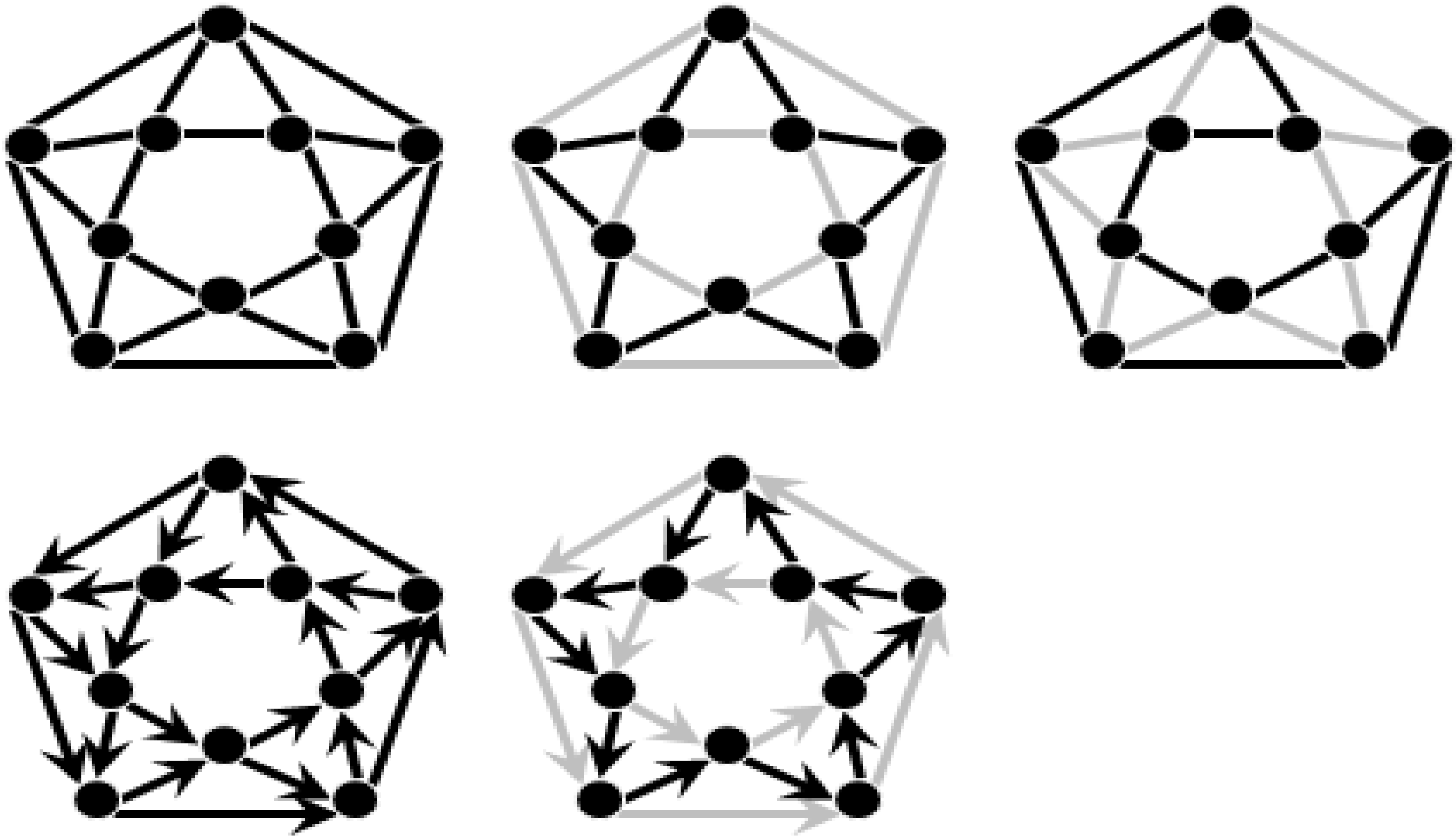
尤拉迴路/漢米爾頓迴圈

- 令G=(V,E)為無向圖或多重圖，G 稱為具尤拉迴路(Euler circuit)意指存在G 的迴路使通過每個v ∈V 且圖形的每個邊恰行過一 次。若G 中存在a 至b 的路線，使通過每個v ∈ V且圖形的每個邊恰行過 一次，則此路線稱為尤拉路線(Euler trail)。

- 判斷條件:令G 為無向圖或多重圖，則 G具有尤拉迴路，若且唯若G 為連通且G 的每個頂點均為偶次數。

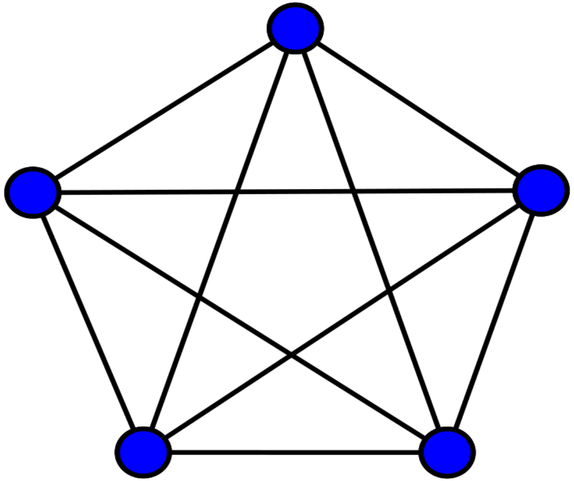
- 若G為圖形或多重圖，我們稱具有漢氏環路(Hamilton cycle)意指G存在一個環路包含V 的每個頂點。漢氏路徑(Hamilton path)意指G 中包含每個頂點的路徑。
- 充分條件：設G=(V,E)是一簡單無向圖，|V|=n，n≥3。若對於任意兩點u,v∈V，那麼對於u,v的度，即d(u)+d(v)≥n，則G是漢米爾頓圖。
- 判斷是否存在 Hamilton Circuit 、找到一個 Hamilton Circuit 是 NP-complete 問題，找到一個權重最小的 Hamilton Circuit 是 NP-hard 問題，目前尚未出現有效率的演算法。

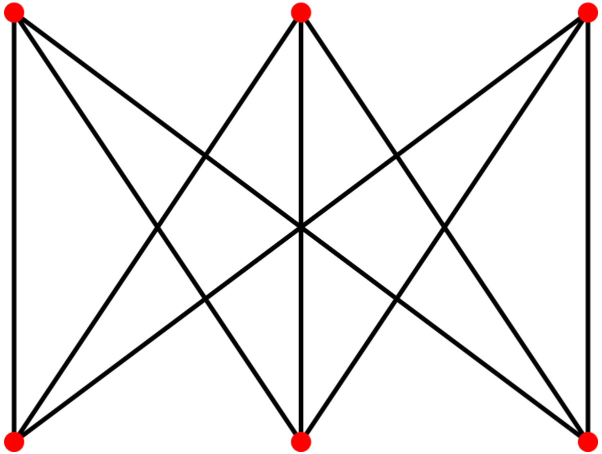


平面圖

在圖論中，平面圖是可以畫在平面上並且使得不同的邊可以互不交疊的圖。而如果一個圖無論怎樣都無法畫在平面上，並使得不同的邊互不交疊，那麼這樣的圖不是平面圖，或者稱為非平面圖。

完全圖 K_5和完全二分圖 $K_{3,3}$（湯瑪森圖）是最「小」的非平面圖。





歐拉公式

V是頂點的數目，E是邊的數目，F是面的數目，C是組成圖形的連通部分的數目。當圖是單連通圖的時候，公式簡化為：

V-E+F=2

圖的連通和著色

連通圖 嚴格定義

對一個圖G= (V,E)中的兩點x和y，若存在交替的頂點和邊的序列，則兩點x和y是連通的。

T是一條x到y的連通路徑，x和y分別是起點和終點。

當x=y時，T被稱為迴路。

如果通路T中的邊兩兩不同，則T是一條簡單通路，否則為一條複雜通路。

如果圖G中每兩點間皆連通，則G是連通圖。

簡單來說，在一個無向圖G中，若從頂點Vi到頂點Vj有路徑相連（當然從Vi到Vj也一定有路徑），則稱Vi和Vj是連通的。

如果G是有向圖，那麼連接Vi和Vj的路徑中所有的邊都必須同向。如果圖中任意兩點都是連通的，那麼圖被稱作**連通圖**。

圖著色問題

給定一個無向圖$G=(V,E)$，其中V為頂點集合，E為集合，圖著色問題即為將V分為K個顏色組，每個組形成一個獨立集，即其中沒有相鄰的頂點。其優化版本是希望獲得最小的K值。

相關術語

- 圖色數:也被稱為頂點色數，指將一張圖上的每個頂點染色，使得相鄰的兩個點顏色不同，最小需要的顏色數。最小染色數用X(G)或Γ(G)表示。

- 邊色數:指將一張圖上的每條邊染色，使有公共頂點的邊顏色不同，最少需要的顏色數叫邊色數，用X'(G)表示。

色多項式

色多項式（英語：chromatic polynomial）是將一個圖*G*進行t-著色的方法數，記作*P*(*G*, *t*)。*P*(*G*, *t*)是關於t的多項式，假設*G*的階數為n，則*P*(*G*, *t*)滿足如下性質：

首項係數為1；

n-1次項係數等於-|E(G)|；

0次項係數等於0；

各項係數正負交替；

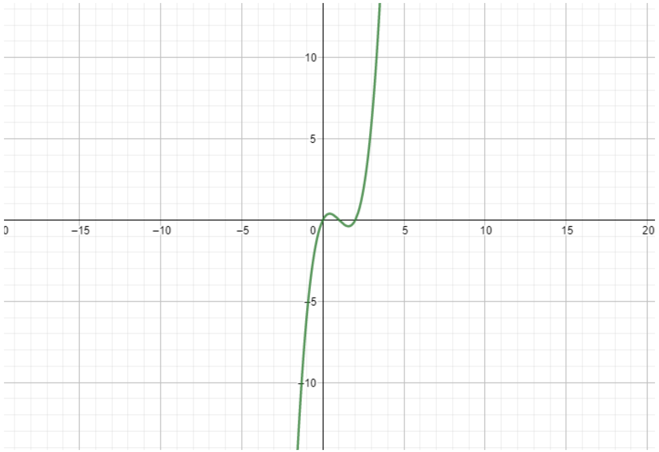
一次項係數不為零若且唯若G連通。

色多項式包含了*G*是否能進行t-著色的信息，即可以根據色多項式確定*G*的色數。

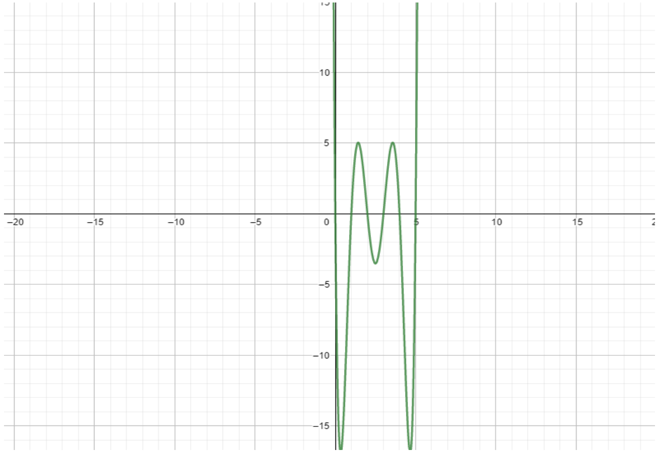
二者具有如下關係：X(G)=min{k:P(G,k)>0}

範例

- 三角形K_3 x (x-1) (x-2)



- 完全圖K_n x (x-1) (x-2)...(x-(n-1))

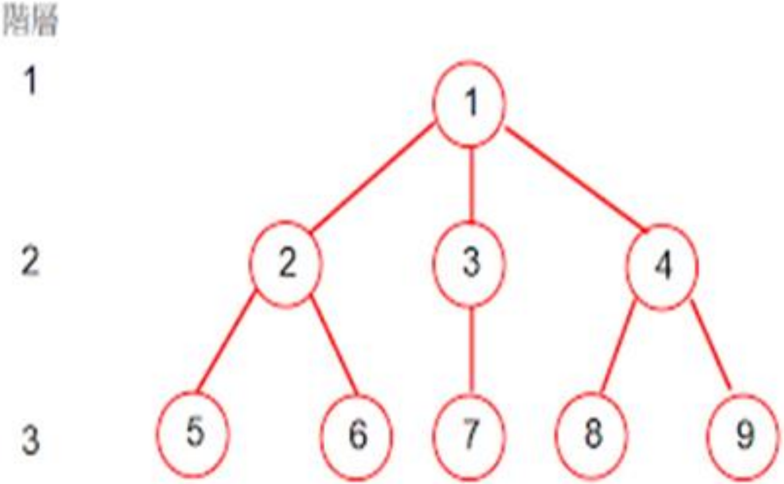


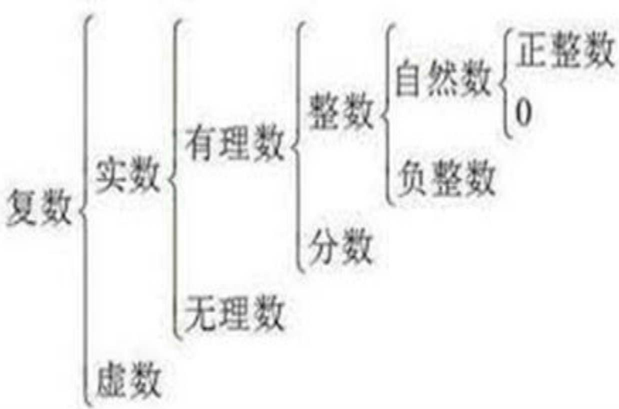
圖的重要類型

1. 樹狀圖
2. 完全圖
3. 連通圖
4. 補圖

樹狀圖:**樹狀圖**（tree diagram）是一種將階層式的構造性質，以圖象方式表現出來的方法。它的名稱來自於以樹的象徵來表現出構造之間的關係，雖然在圖象的呈現上，它是一個上下顛倒的樹，其根部在上方，是資料的開頭，而下方的資料稱為葉子。 一個樹形結構的外層和內層有相似的結構，所以，這種結構多可以遞迴的表示。樹狀結構只是一個概念，可以用許多種不同形式來展現。在數學的圖論與集合論中，對於樹狀結構的性質探討是一個重要課題。在計算機科學中，則以樹狀資料結構作為討論主題。

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A8%B9%E7%8B%80%E7%B5%90%E6%A7%8B





https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A0%91

https://zh.pngtree.com/freepng/creative-dendrogram_5408332.html

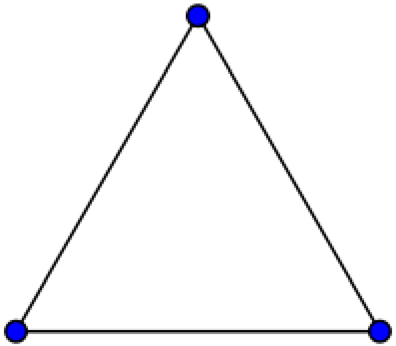
https://www.itsfun.com.tw/%E6%95%B8%E9%9B%86/wiki-2755186

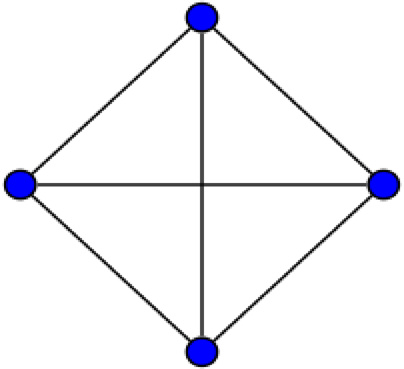
https://zh.pngtree.com/freepng/creative-dendrogram_5408332.ht

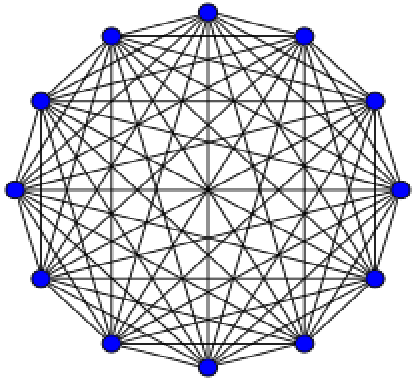
完全圖:在圖論中，完全圖是一個簡單的無向圖，其中每一對不同的頂點都只有一條邊相連。完全有向圖是一個有向圖，其中每一對不同的頂點都只有一對邊相連（每個方向各一個）。圖論起源於歐拉在1736年解決七橋問題上做的工作，但是通過將頂點放在正多邊形上來繪製完全圖的嘗試，早在13世紀拉蒙·柳利 的工作中就出現了。這種畫法有時被稱作**神秘玫瑰**。應用於幾何跟拓樸中。

n階完全圖可以代表(n-1)個單體，幾何上，k3代表三角形，k4代表四面體，以此類推

單體:0-單體就是點，1-單體就是線段，2-單體就是三角形，3-單體就是四面體







點: n

邊: ½ *n(n-1)

色數: n 如果n是奇數

n-1 如果n是偶數

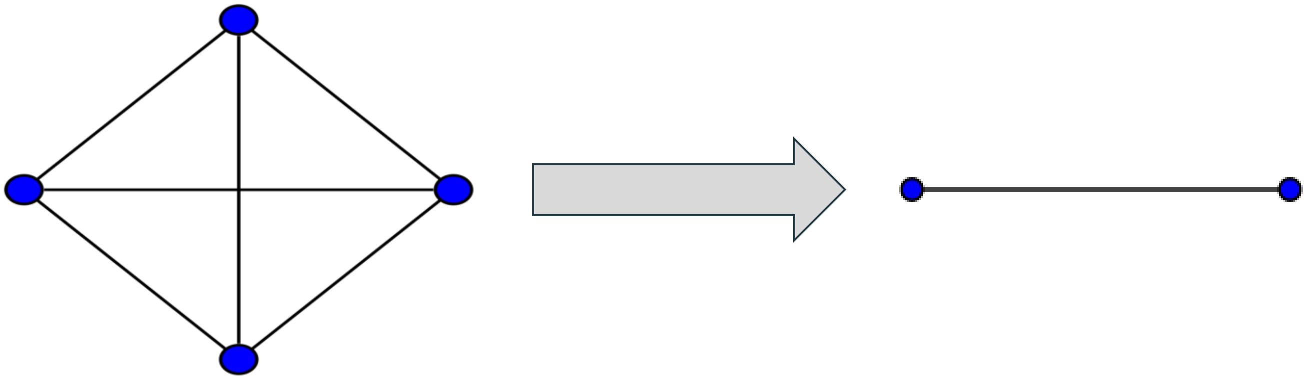
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%AE%8C%E5%85%A8%E5%9C%96

連通圖:作為圖論中最基本的概念之一，連通圖基於連通的概念。在一個無向圖G中，若從頂點vi到頂點vj有路徑相連，則稱vi跟vj是連通的。如果G是有向圖，那麼連接vi和vj的路徑中所有的邊都必須同向。如果圖中任意兩點都是連通的，那麼圖被稱作連通圖。
圖的連通性是圖的基本性質。連通度是刻畫網絡的一個重要指標。

弱連通:如果對於任意一對頂點u,v，存在一條從u到v的有效路徑，或者存在一條從v到u的有效路徑

強連通:如果對於任意一對頂點u,v，同時存在雙向的有效路徑

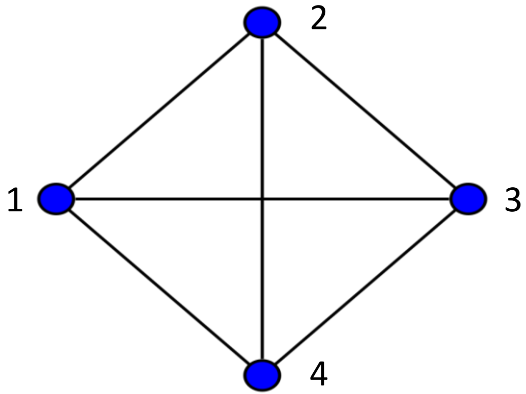
連通度:**點連通度**的定義：一個具有N個點的圖G中，**在去掉任意k-1個頂點後（1<=k<=N）,所得的子圖仍然連通，去掉K個頂點後不連通**，則稱G是**K連通圖**，K稱作圖G的連通度，記作**K（G）**。



邊連通度:邊連通度就是要找出任意兩點的**弱獨立軌的最小值。如果圖G為完全圖，則K`(G)為n-1。**

獨立軌：A，B是圖G（有向無向均可）的兩個頂點，我們稱為從A到B的兩兩無公共**內**頂點的軌為獨立軌，其**最大的條數**記作**p(A,B)**

1—2—3， 1—7—3
1—6—5—4—3



p(1,3)=3

1到3
1到2到3
1到4到3

整理:

1.連通度分為點連通度和邊連通度
點連通度:去掉n-1個點後仍連通(去掉n個點後不連通)，連通度為n。
邊連通度: 弱獨立軌的最小值。

2.不連通圖的邊連通度和點連通度均為0

3.n階完全圖的邊連通度是n-1，其他類型的n階圖的邊連通度嚴格小於n-1。

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%BF%9E%E9%80%9A%E5%9B%BE
https://codertw.com/%E7%A8%8B%E5%BC%8F%E8%AA%9E%E8%A8%80/562640/

連通圖的個數

n	個數
2	1
3	4
4	38
5	728
6	26704
7	1866256

連通圖(Connected graph):圖形G，任何一對不同頂點之間都有路徑可以連通。強連通圖: 任一對頂點之間都有路徑互通

完全圖 (Complete graph) : 圖形G中任何一對頂點都是相鄰的。

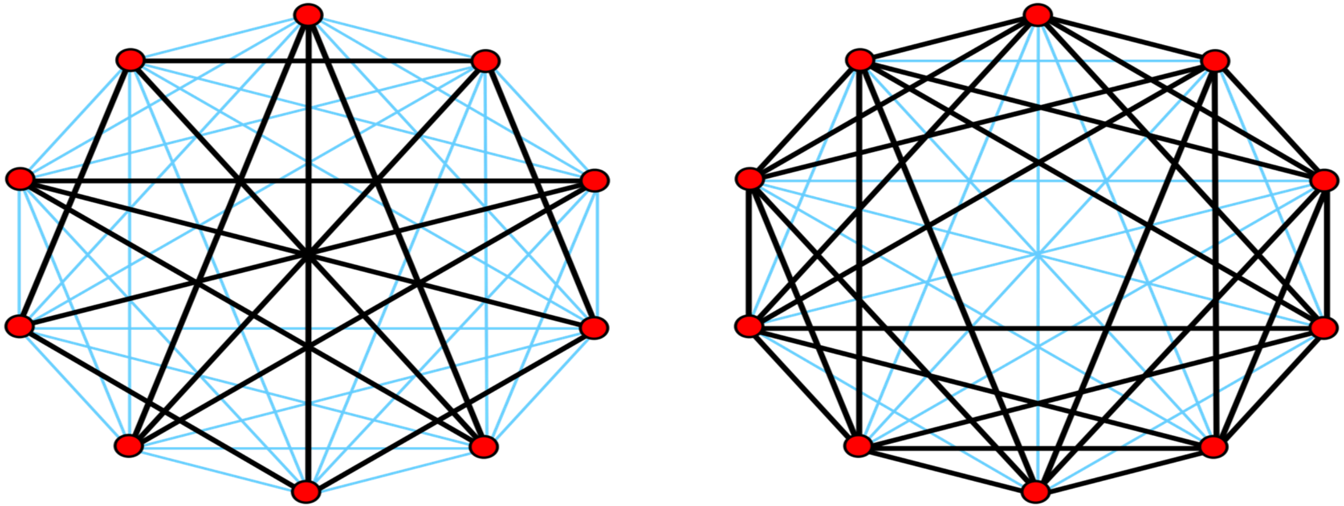
有n個頂點的無向完全圖會有: n(n-1)/2個無向邊

有n個頂點的有向完全圖會有:n(n-1)個有向邊

https://ithelp.ithome.com.tw/articles/10203520

補圖:在圖論裡面，一個圖G的**補圖**（complement）或者**反面**（inverse）是一個圖有著跟G相同的點，而且這些點之間有邊相連若且唯若在G裡面他們沒有邊相連。在製作圖的時候，你可以先建立一個有G所有點的完全圖，然後清除G裡面已經有的邊來得到補圖。這裡的補圖並不是圖本身的補集；因為只有邊的部份合乎補集的概念。

令$G = (V, E)$是一個圖，K包含所有V的二元子集（2-element subset）。則圖$H = (V, K \setminus E)$ 是G的補圖。



https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%A3%9C%E5%9C%96

樹和森林

樹是一種抽象資料類型（ADT）或是實作這種抽象資料類型的資料結構，用來類比具有樹狀結構性質的資料集合。把它叫做「樹」是因為它看起來像一棵倒掛的樹，也就是說它是根朝上，而葉朝下的。

樹

1. 樹是一種邏輯結構。

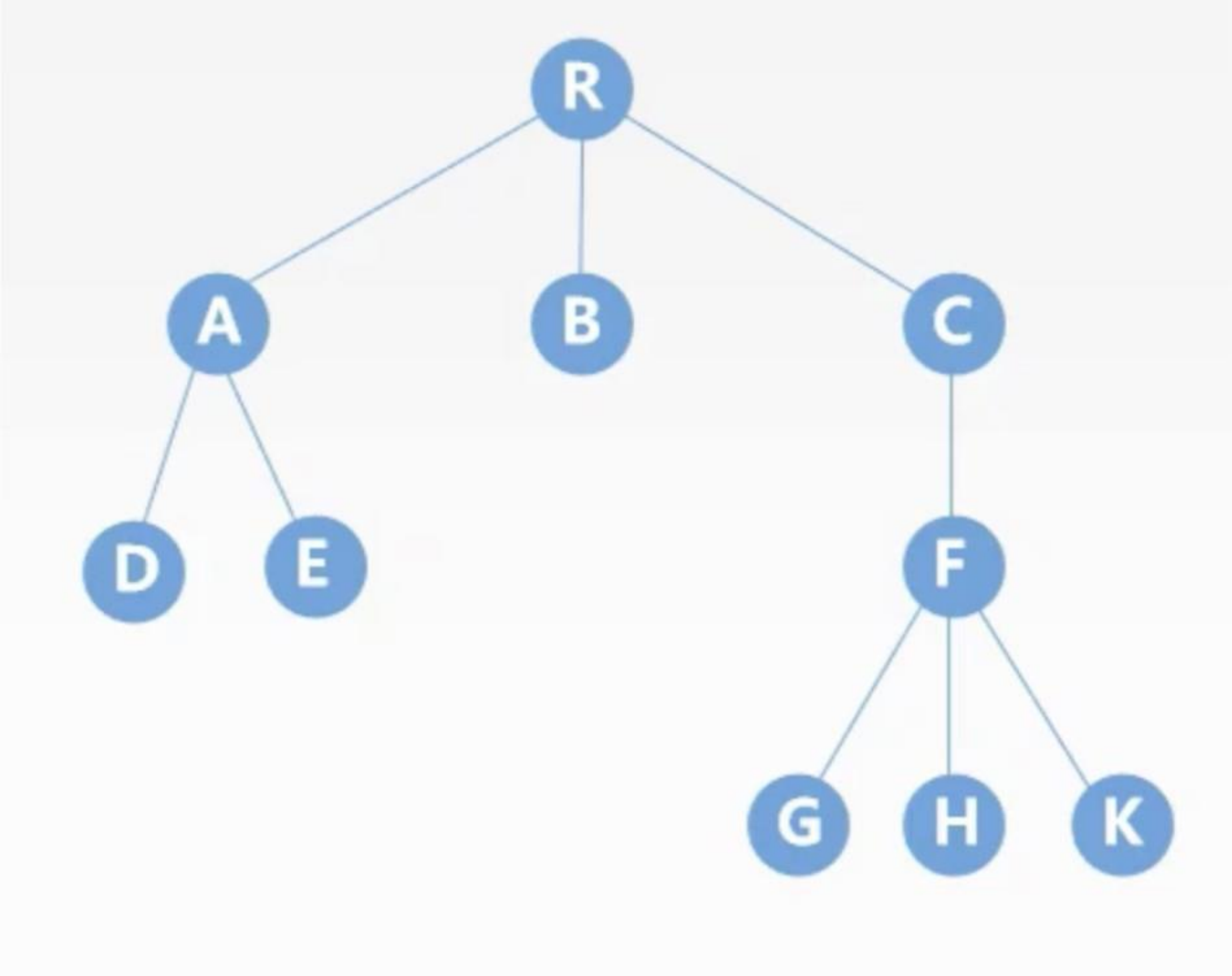
2. 樹是n個節點(Node)的有限集合。n=0時，稱為空樹，若非空樹，則滿足：

i. 僅有一個特定的節點稱為根（Root）。

ii. 當n>1時，其餘結點可分為m個互不相交的有限集合，其中每個集合本身又是一棵樹，稱為根結點的子樹，n個結點的樹只有n-1條邊

iii. 樹個根節點沒有前驅節點，除了根節點以外的所有結點都有且僅有一個前驅結點

iv. 樹中的節點有多個或者0個後繼節點。


R
A
B
C
D
E
F
G
H
K

樹的基本術語(以上張圖為例)

1. 分支度(Degree)
2. 樹葉(Leaf) or 終端節點(Terminal Node)
3. 非樹葉(Non-Leaf) or 非終端節點(Nonterminal Node)
4. 子點(Child)和父點(Parent)
5. 兄弟(Sibling)
6. 祖先(Ancestors)和後代(Descendent)
7. 階級(Level)

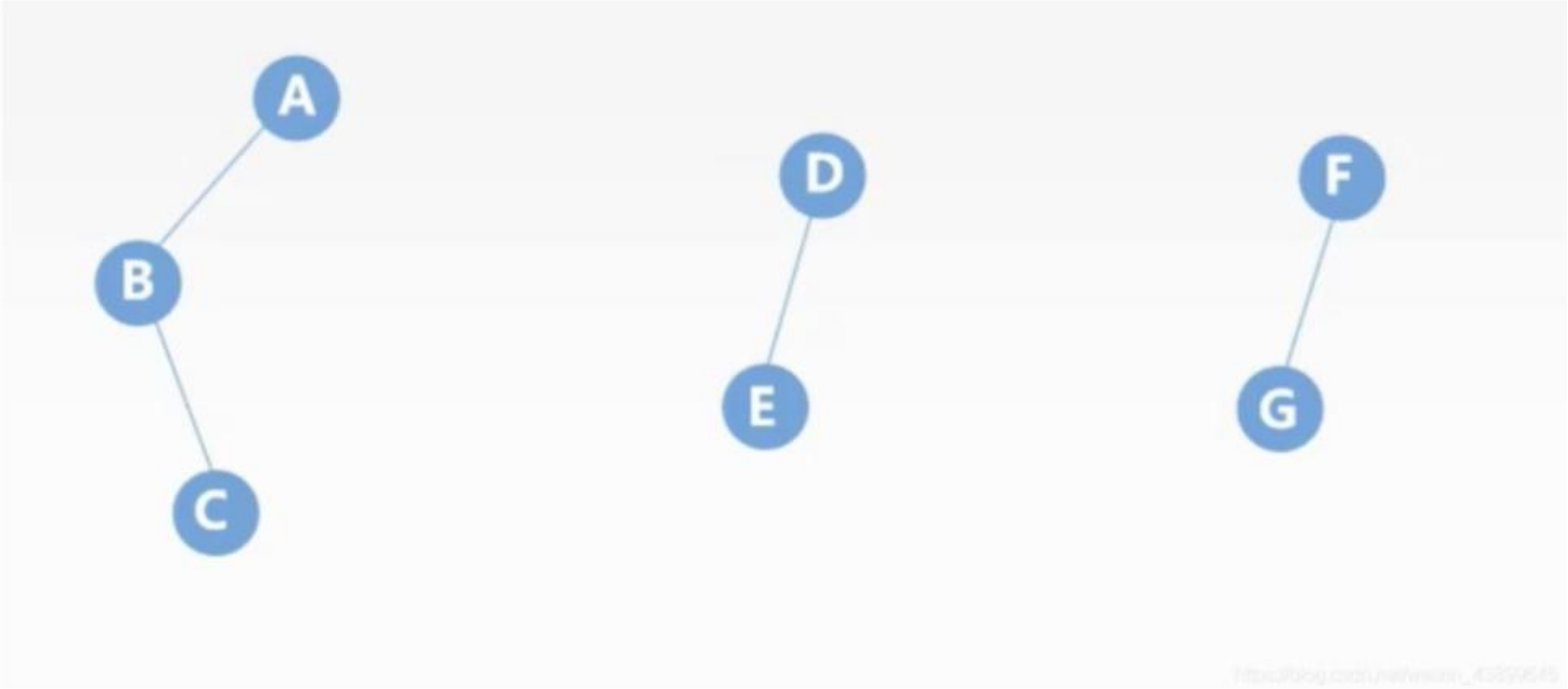
8. 樹的分支度(Degree of Tree)

9. 高度(Height) or 深度(Depth)

10.森林(Forest)

森林

森林就是由k棵($k \geq 0$)互斥樹所形成的集合。


A
B
C
D
E
F
G