第六組期末報告

-魔術方塊中的數學

組員：藍立翔、黃暐傑、
高林雅星、廖柔雅、王承瀚

簡介

魔術方塊牽扯到的數學有代數、群論、數論，不只是用數學的角度來分析魔方，更用它來做數學的教學。判斷公式和推理方塊後面的排列都是在發揮腦中的數學思維，所以除了得到成就感、追求自己的突破之外，魔方還幫助玩家增進數學思考的能力。最早是一位叫魯比克（Rubik）的教授為了幫助學生們認識空間立方體的組成和結構以及鍛鍊學生的空間思維能力和記憶力，設計了一個立方體切割的實驗，這就是魔方最早的概念雛形。我們之後的報告內容會包含：魔方的基本概念、群論基礎知識、排列的表示法與運算、魔方操作的表示法與運算。

參考來源: 數學專題 (chowkafat.net)
魔方求解器 (rubiks-cube-solver.com)

The Mathematics of the Rubik’ s Cube

魔術方塊中的數學

The Mathematics of the Rubik’ s Cube
魔術方塊中的數學

05

Parity

奇偶性

06

Subgroups

子集合

07

Lagrange’s Theorem

拉格朗日定理

08

Solving the Cube

解魔術方塊

前言

在解魔方前必須先了解，一般我們看到的都是3X3階的魔術方塊，但實際上種類非常的多。通常每個人第一次嘗試解決魔方時只是徒勞地徒勞無功地打亂原本的樣子，其實一旦學習了稱為宏的特定算法核心集，解決多維數據集幾乎變得不那麼容易了。 使用基本的群論，這些解決方案並非難以發現的原因將變得顯而易見。

01

The History of Rubik's Cube

魔術方塊的歷史

魔方Rubik's Cube 又叫魔術方塊，也稱魯比克（Rubik）方塊。起源最早的魔方是匈牙利的一位叫魯比克的教授於1974年發明的，但是這位教授發明它並不是為了投入生產和娛樂。

因為他是建築學教授，為了幫助學生們認識空間立方體的組成和結構以及鍛鍊學生的空間思維能力和記憶力，魯比克教授設計了一個立方體切割的實驗，這就是魔方最早的概念雛形。

他在這個概念的基礎上，想製作出一個輔助教學的教具，他用了6周的時間設計出了一個可以上下左右旋轉並且交叉換位的3 * 3 * 3正立方體結構，製作出這個教具後，魯比克教授在其6個外表面塗以6種不同的顏色，魔方從此誕生。

02

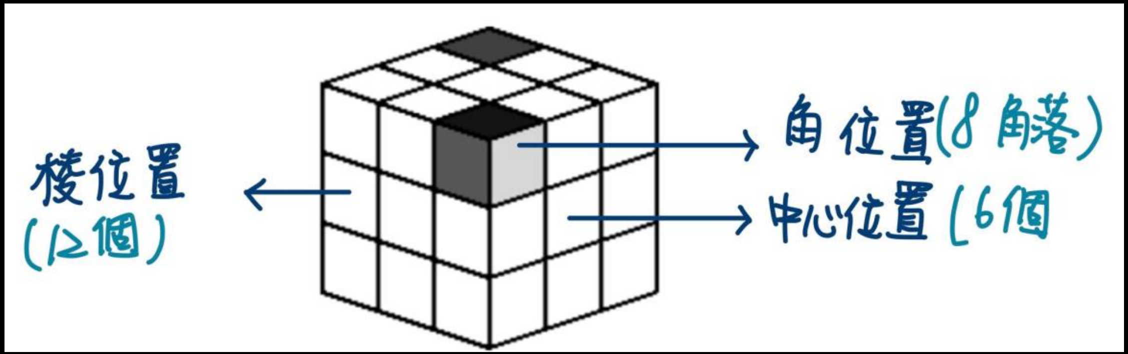
Bounds on Solving a Rubik’s Cube

魔術方塊解法的範圍

Bounds on Solving a Rubik’s Cube

· 三階魔術方塊的總變化數是$(8!\cdot 3^8\cdot 12!\cdot 2^{12})/(2\cdot 2\cdot 3)=43,252,003,274,489,856,000$

· 魔術方塊六個中心塊是不可以移動的，他們由於顏色的區分正好構成一個坐標系。在這個坐標系里有8個角位置，和12個棱位置。對於8個角位置，有8！種排列，而每個小角色塊有3種朝向，所以要乘上3^8。對於12個棱色塊，同樣的道理，有$12!\cdot 2^{12}$。這樣兩個數字相乘就是$8!\cdot 3^8\cdot 12!\cdot 2^{12}$。分母的2*3*2，分別的意義是，保持其他色塊的位置和朝向不變，不可能單獨翻轉一個棱色塊（也就是將其兩個面對調）。



God’s Number 上帝的數字

- 很顯然，任意組合的魔方都可以在有限步驟內復原，那麼，問題來了：是否存在復原任意組合魔方所需的最少轉動次數N？如果至多進行N次轉動便可以將任意魔方復原，這個N具體為多少？這個數字N被稱為上帝數字，從魔方剛剛流行的1982年便被提了出來。

03

Theorems About Groups

群論

Definition of Groups 群集的定義

#一個集合 G 若元素間有一個運算 * 且符合下列性質則稱為一個 group.

- 若a, b ∈ G 則 a *b ∈ G
- 若a, b, c ∈ G 則 (a*b)*c=a*(b*c).
- 在 G 中存在一個元素 e 使得 G 中所有元素 g 都有 g*e = e*g = g.
- 對 G 任一元素 g 都可在 G 中找到反元素 g' 使得 g*g' = g'*g = e.

Theorems About Groups 群集的定理

- The identity element, e, is unique.
- If $a * b = e$, then $a = b^{-1}$
- If $a * x = b * x$, then $a = b$
- The inverse of (ab) is $b^{-1}a^{-1}$
- $(a^{-1})^{-1} = e$

Theorems About Groups 群集的定理

- 單位元素e是獨立存在的
- 如果a ∗ b = e, then a = b^-1(b的反元素)
- 如果 a ∗ x = b ∗ x, 則 a = b
- (ab) 的反元素是 $b^{-1}a^{-1}$
- $(a^{-1})^{-1}$ =e

Cube Moves as Group Elements 魔方群集

- We can conveniently represent cube permutations as group elements. We will call the group of permutations **R**, for Rubik (not to be confused with the symbol for real numbers).

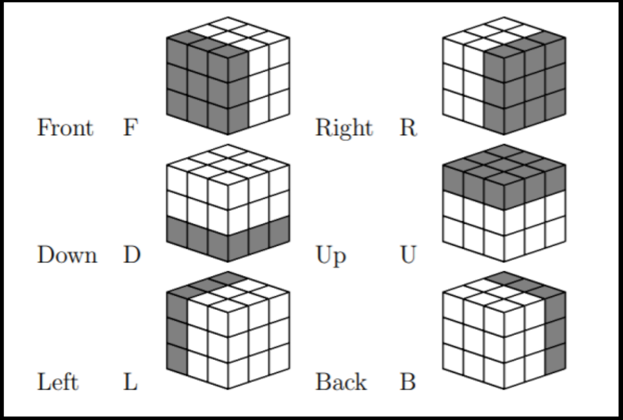
- 把以上介紹的套用到魔方當中，得到一「魔方群」(Rubik)，

群集元素表示魔方的排列，把此魔方群(Rubik) 記作**R**

The Binary Operator for the Rubik Group
魔方群集的二元運算子

・前面提到的「*」二元運算子，將會表示一系列的魔方動作
(例如:先順時針轉前面90度再逆時針旋轉上面180度為 F*U(-2)，是**R**的元素之一)

・只要所有有關「*」的運算符合封閉性，不管如何解出魔方，「e」單位元素永遠不會影響結果



04

Permutations

排列

兩行式

給定集合X，X的一個「排列」就是把X中元素排序的某個可能方案。舉例說，如果X = {A, B, C}，那麼ACB和BCA就是X的兩個不同排列。
排列也可被看成X上的一個對射(Bijection)，即One-one,Onto Function。前述的兩個排列ACB和BCA便可以表示為

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$$

循環式

　僅用一行元素表達排列，該行元素由一或多個括弧組成。不同括弧中的元素各自獨立，彼此之間沒有映射關係；但在每個括弧中左右相鄰的任意兩個元素之間則具有映射關係，即居於左邊的元素映射到居於右邊的元素。

　前述的兩個排列ACB和BCA便可以表示為

(A)(BC)　　　　(ABC)

　左式(A)自成一個括弧，這代表把A映射為A；(BC)則表示把B映射為C，並把C映射為B

　右式A映射為B，B映射為C，C映射為A

對換

「循環式」中，剛好包含兩個元素的括弧具有特殊的地位，稱為「對換」。任何排列的「循環式」都可改寫成一系列「對換」的複合。舉例說，(ABC)(DEF)便有以下改寫方案：

(ABC)(DEF) = (AB)(AC)(DE)(DF)

左式: A->B ; B->C ; C->A ; D->E ; E->F ; F->D
=BCAEFD
右式: A<->B ; A<->C ; D<->E ; D<->F
=BCAEFD

5

Parity

奇偶性

在數學中，奇偶性是對於整數的一種性質，每個整數都可被分為奇數或偶數：可被2整除者是偶數（包括2本身與0）；不可被2整除者是奇數。

偶數定義為所有形如2k的整數，其中k是整數：

$$\{\ 2k \mid k \in \mathbb{Z}\ \}$$

上述的奇偶性僅適用於整數，因此 $\frac{1}{2}$、4.201等不適用。

06

Subgroups

子集合

子集，為某個集合中一部份的集合，故亦稱部分集合。若A和B為集合，且A的所有元素都是B的元素，則有：

- A為B的子集(或稱包含於B)
- $A \subseteq B$
- B是A的父集/超集(或稱包含於A)
- $B \supseteq A$

07

Lagrange’s Theorem

拉格朗日定律

- **拉格朗日定理**是群論的定理，利用陪集證明了子群的階一定是有限群的階的因數值。
- 敘述：設H是有限群G的子群，則H的階整除G的階。

定理的證明利用了左陪集的性質，令H是群G的子群。可知H在G中的每個左陪集都是一個等價類。將G作左陪集分解，由於每個等價類的元素個數都相等，都等於H的元素個數（H是H關於e的左陪集），因此H的階（元素個數）整除G的階，商是H在G中的左陪集個數，叫做H對G的指數，記作[G:H]。

註:若G為群，H為其子群，而g為G中元素，
則$gH = \{gh : h$為H中元素$\}$為H在G中的**左陪集**，
而$Hg = \{hg : h$為H中元素$\}$為H在G中的**右陪集**。

推論

1. 由拉格朗日定理可立即得到：由有限群G中一個元素a的階數整除群G的階（考慮由a生成的循環群）。

2. 如果n是質數，那麼所有階數為n的群都同構（因為質數只有1和它本身為因數）。

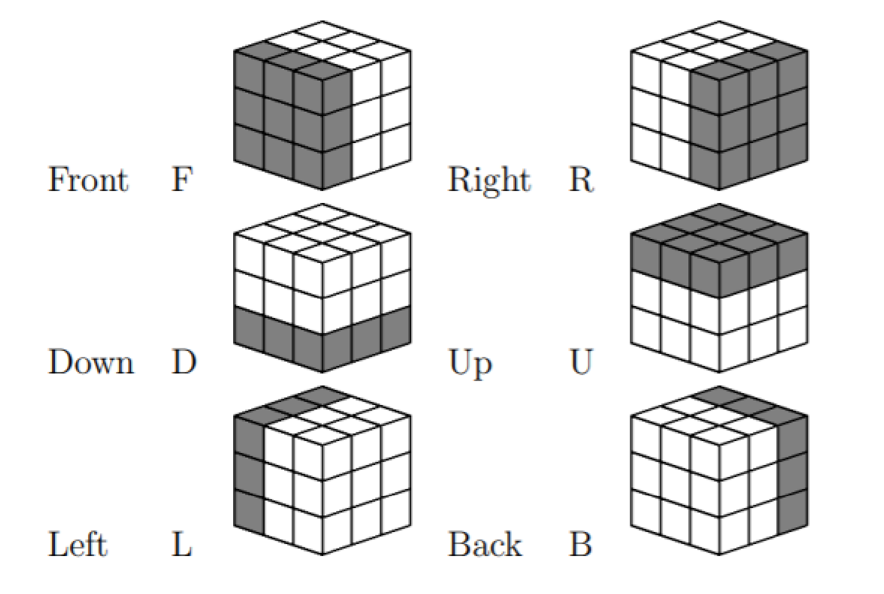
8

Solving the Cube

解魔術方塊

Notation

- 為了方便解釋 以下為將會使用到的名詞



Notation

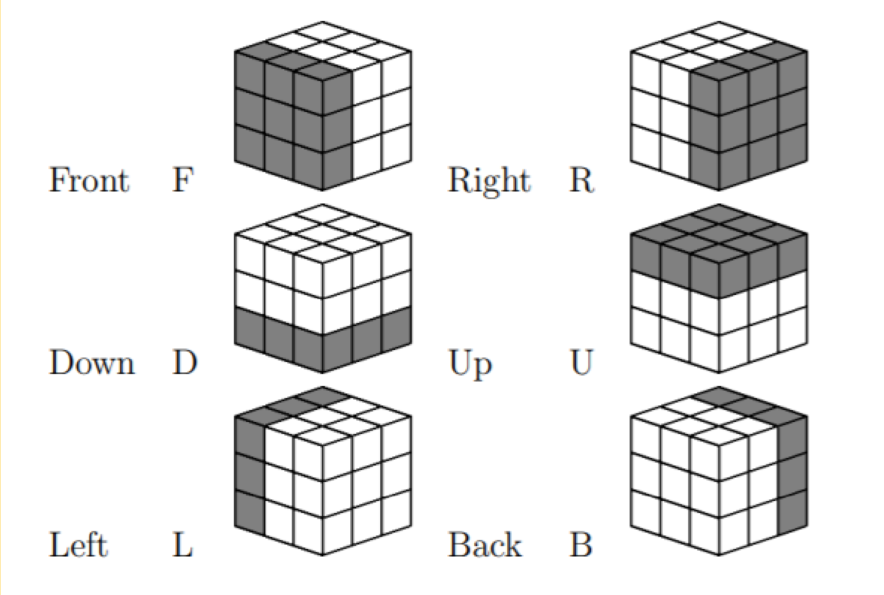
Example:

- F代表[Front]這一面順時針旋轉90度
- F’代表[Front]這一面逆時針旋轉90度
- F^2或F2

代表[Front]這一面順時針旋轉180度

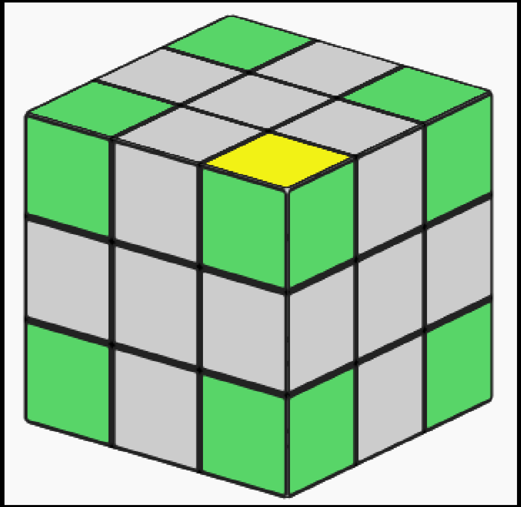
- F^-2或F(-2)

代表[Front]這一面逆時針旋轉180度



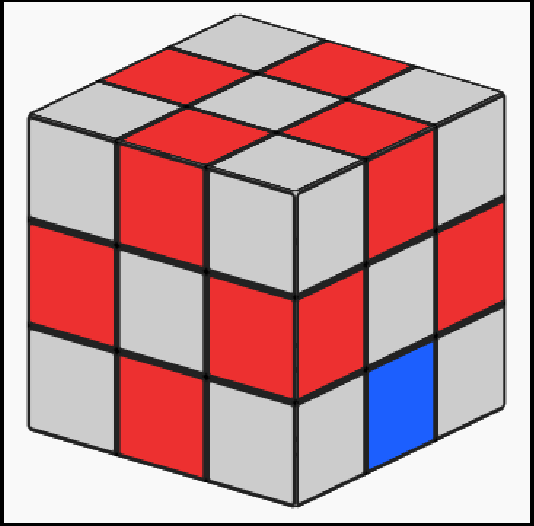
魔方各部件及其基本操作的命名法

魔方有八個角落，把位於各個角落上的方塊稱為「角塊」。由於每個角塊包含三個面的一部分(以下稱為「小面」)，可以用這三個小面的代號來命名這個角塊，例如包含前、右、上這三個小面的角塊便可以稱為「Fru」，如下圖所示。



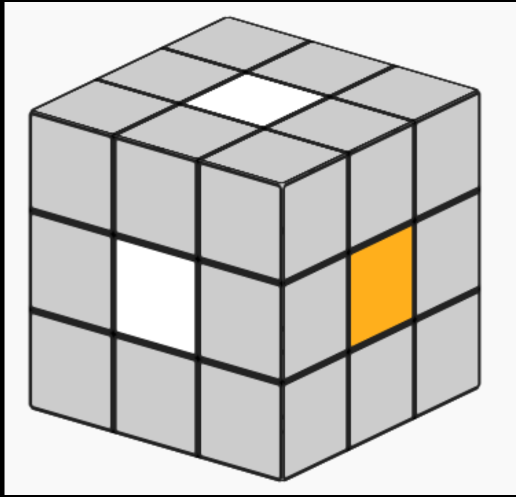
魔方各部件及其基本操作的命名法

魔方有12條處於外沿的邊，把位於每條邊中央位置上的方塊稱為「邊塊」。由於每個邊塊包含兩個小面，我們可以用這兩個小面的代號來命名這個邊塊，例如包含右、下這兩個小面的邊塊便可以稱為「rd」，如下圖所示。



魔方各部件及其基本操作的命名法

此外，魔方的六個外表面的中心位置上還各有一個方塊，可稱為「中心塊」，每個中心塊只包含一個小面，我們可以用這個小面的代號來命名這個中心，例如包含右小面的中心塊便可以稱為「r」



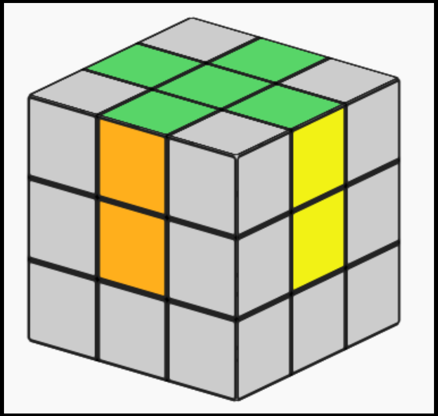
魔方循環式

下表列出魔方六個基本操作F、B、R、L、U、D的「循環式」。「循環式」還以下標「0 / 1 / 2」標明角塊扭轉的情況，以及以下標「0 / 1」標明邊塊翻轉的情況：對於角塊而言，扭轉數「0」、「1」和「2」分別代表「正常」、「順時針扭轉」和「逆時針扭轉」；對於邊塊而言，翻轉數「0」和「1」分別代表「正常」和「翻轉」。

操作	循環式
F	$(Fru_1, Frd_2, Fld_1, Flu_2)(Fr_0, Fd_0, Fl_0, Fu_0)$
B	$(Bru_2, Blu_1, Bld_2, Brd_1)(Br_0, Bu_0, Bl_0, Bd_0)$
R	$(Fru_2, Bru_1, Brd_2, Frd_1)(Fr_1, Ru_1, Br_1, Rd_1)$
L	$(Flu_1, Fld_2, Bld_1, Blu_2)(Fl_1, Ld_1, Bl_1, Lu_1)$
U	$(Fru_0, Flu_0, Blu_0, Bru_0)(Fu_0, Lu_0, Bu_0, Ru_0)$
D	$(Frd_0, Brd_0, Bld_0, Fld_0)(Fd_0, Rd_0, Bd_0, Ld_0)$

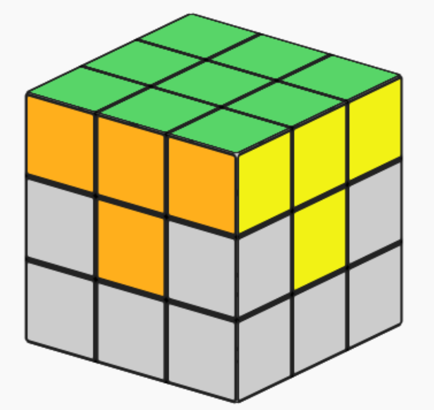
第一步：搞定下面的四個邊塊

首先任意選定一個面作為下面，設為綠色面。為方便操作，首先把綠色面向上，即暫時把下面當作上面處理。在這一步，我們的目標是搞定魔方綠色面的四個邊塊，從而令魔方的上面出現綠色十字，如下圖所示的情況：



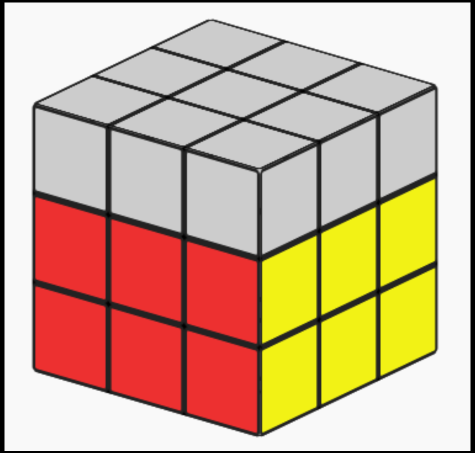
第二步：搞定下面的四個角塊

在這一步，我們繼續暫時把下面(即綠色面)當作上面處理。這一步的目標是搞定綠色面的四個角塊，同時不影響上一步已搞定的綠色十字，從而最終搞定整個綠色面，如下圖所示：



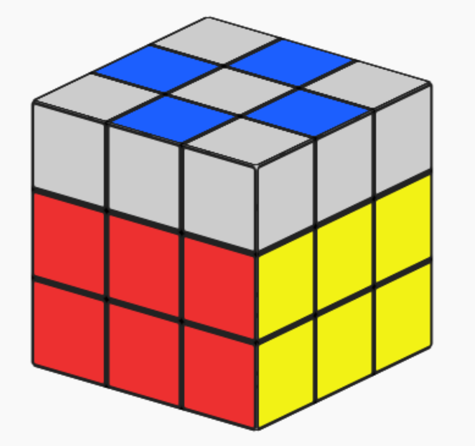
第三步：搞定夾心層的四個邊塊

至此我們已完全搞定魔方的綠色面，現在我們可以把魔方整個翻過來，使綠色面朝下。接下來的一步便是要搞定魔方夾心層上的四個邊塊，如下圖所示：



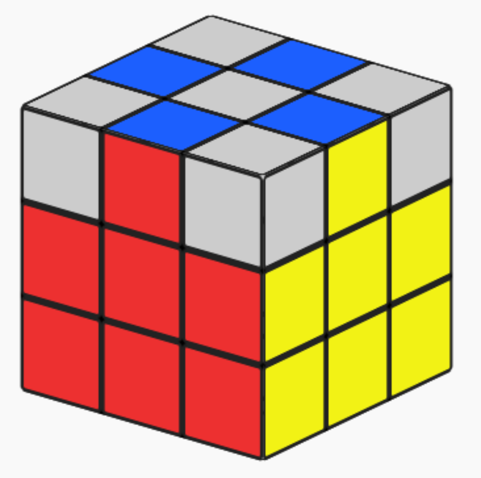
第四步：使上面的四個邊塊正常

這一步的目標是要使魔方上面的四個邊塊正常(即令這些邊塊的藍色小面朝上)，但不一定處於正確位置。完成這一步後，魔方的上面會出現一個藍色十字，如下圖所示：



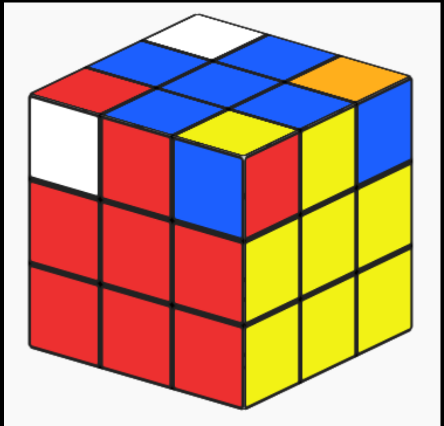
第五步：使上面的四個邊塊歸位

在這一步，我們要令魔方上面的四個正常邊塊歸位(即處於正確位置)，如下圖所示：



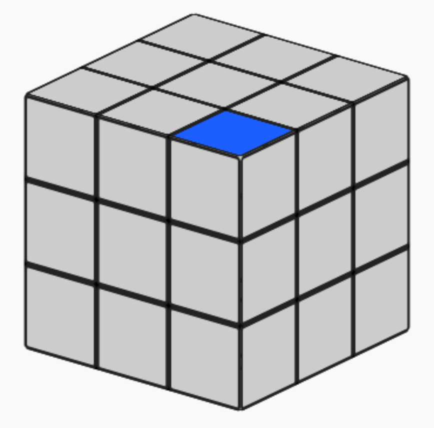
第六步：使上面的四個角塊歸位

這一步的目標是使魔方上面的四個角塊歸位，但其方向不一定正常，如下圖所示(舉例說，在下圖中，「藍黃紅」角塊位於Fru位置，這是這個角塊的正確位置；但該角塊發生「逆時針扭轉」，所以其方向並不正常)：



第七步：使上面的四個角塊正常

在這最後一步，我們要使魔方上面四個已歸位的角塊正常。任選一個面向前，接著轉動上面，使任意一個扭轉了的角塊位於「Fru」角落。然後重覆進行前面介紹過的操作(3)兩次或四次，直至「Fru」位置上的角塊的藍色小面朝上為止



https://youtu.be/76NmRQx5CLA

分工

410831110 藍立翔： 報告
410831108黃暐傑：報告
410931223高林雅星 ：報告、製作PPT
410931227廖柔雅：報告、製作PPT
410831212王承瀚：報告