

博弈遊戲

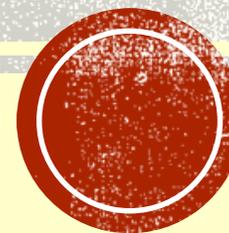
410631118 傅子銓

410631212 程鉉曉

410731217 周捷

410831111 莊峻評

410831134 鄭朧玥



德州撲克規則一

■ 座位分配方式與發牌次序

一般撲克錦標賽座位均採隨機分配，除撲克室另有規定外，私人遊戲多以抽牌比大小決定起始座位順序及第一個發牌者位置。抽牌選位的方法為每人發一張牌，抽到最大牌者為莊家，當有兩人以上抽到最大的牌（不比花色），重新抽牌直到其中一位玩家獨大為起始莊家。每一輪結束後，莊家依順時針方向由玩家依序輪流擔任。

下盲注（blinds）及切牌後進行發牌，無論是否由荷官（專屬發牌者）或玩家發牌，皆由按鈕（dealer button）位置的下家開始，依順時鐘方向派發，每輪一張共兩輪，每一個參加的玩家都會得到兩張底牌。



術語解釋：

盲注 (Blind)

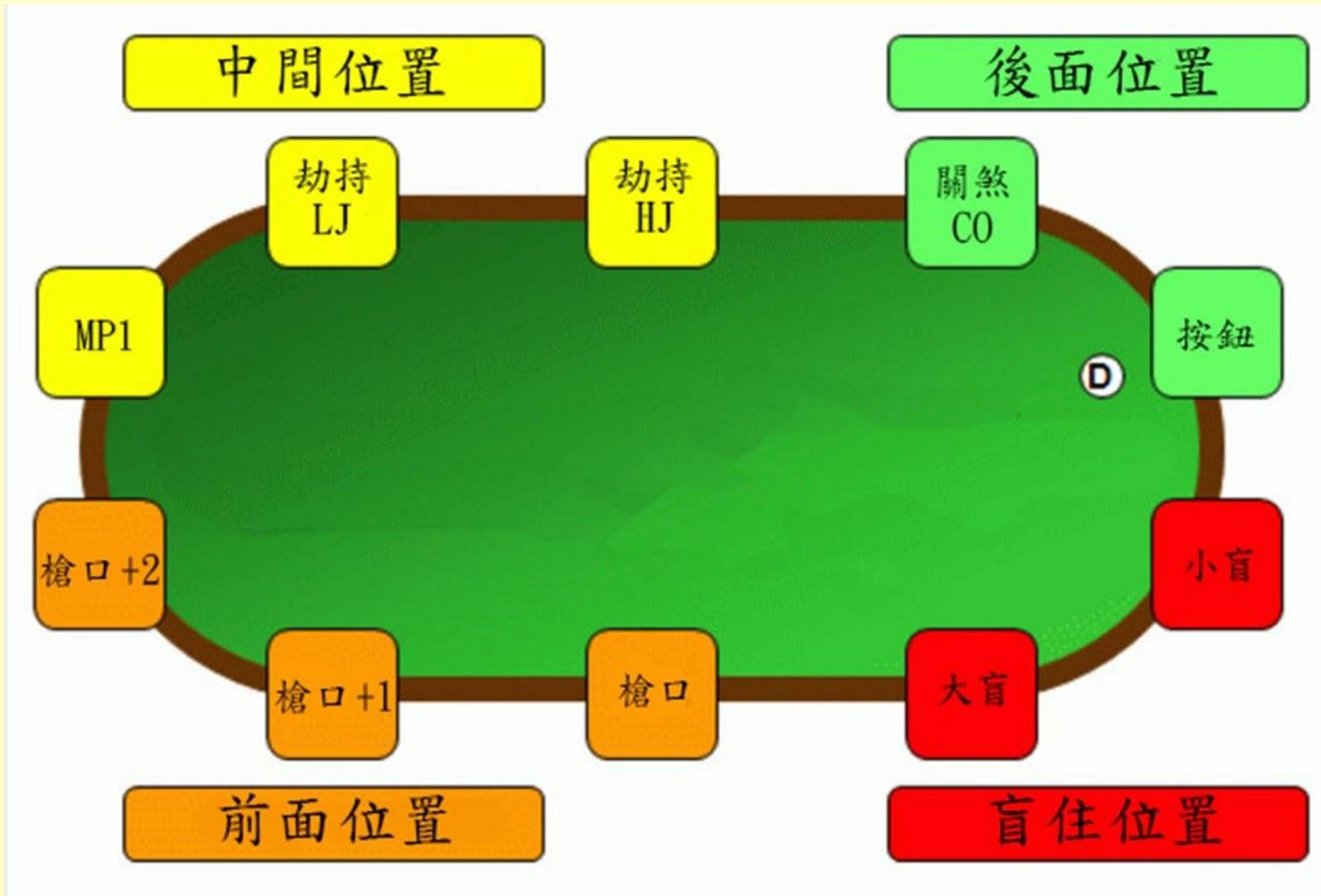
指發牌前玩家必須押下的賭注。盲注通常分為小盲注和大盲注，按鈕順時針方向的下一位玩家下小盲注，再下一位玩家下大盲注。大盲注的金額是小盲注的兩倍。

發牌員/按鈕玩家 (Dealer)

(1) 在現場撲克比賽中，負責發牌、分配籌碼與監督牌局的。

(2) 在線上遊戲中的「名目莊家」，即「按鈕玩家」，不負責發牌，是牌局中最後一位行動的玩家。





圖片出處:

德州撲克技巧攻略大全 | 十大必勝提升攻略技巧 | 德州撲克台灣 2021 (pokertaiwan.com)



牌局進行流程-(1-6)

第一輪前先決定座位及起始發牌位置。

1.洗牌並切牌。

2.本次輪到擔任盲注的玩家下盲注。

3.為每位玩家發兩張底牌。

4.翻牌前（**preflop**）喊注。

5.銷一張牌後發出三張公共牌。

6.翻牌圈（**flop**）喊注。

參考網址: [德州撲克遊戲怎麼玩？德州撲克規則與簡單技巧介紹 - 超能撲克 \(powerxpoker.com\)](http://powerxpoker.com)



牌局進行流程-(7-12)

7. 銷一張牌後發出一張公共牌（轉牌）。
8. 轉牌圈（**turn**）喊注。
9. 銷一張牌後發出一張公共牌（河牌）。
10. 河牌圈（**river**）喊注。
11. 若有兩家以上未蓋牌則攤牌比大小，依勝負分配總彩金。
12. 結束本回合，莊家位置依順時鐘次序移動至下一家進行下一輪。



術語解釋(一)：

1. 翻牌前 (Pre-flop)

指翻牌圈之前的牌局，此時玩家手中只有2張底牌。

2. 翻牌/翻牌圈 (Flop)

(1) 「翻牌」為德州撲克及奧馬哈的前3張公用牌。

(2) 「翻牌圈」指發下翻牌後的一回合下注。

3. 轉牌/轉牌圈 (Turn)

(1) 德州撲克與奧馬哈中的第四張公用牌。

(2) 發下翻牌後的倒數第二回合下注，也稱為「第四街」。

4. 河牌/河牌圈 (River)

(1) 第5張公用牌，也是最後一張公用牌。

(2) 「河牌圈」指發下河牌後的一回合下注。



下注次序

第一輪下注稱為「翻牌前」(preflop)，由下大盲注下家的玩家開始喊注(如無盲注，則為發牌人左方的玩家)，以順時針方向繼續。

各圈喊注將持續直至每個玩家都已為以下三種狀態之一：

1. 蓋牌 (fold)，即捨棄並覆蓋手中的牌，放棄已投入底池的籌碼退出該局。
2. 投入了與所有其他未蓋牌的玩家等量的籌碼。
3. 全下 (all-in)，投入了尚餘的全部籌碼。



術語解釋(二)：

1. 蓋牌 (Fold)

放棄手中的牌，退出牌局，稱為「蓋牌」。蓋牌的玩家放棄贏得底池的權利。

2. 全下 (All-in)

將所剩的籌碼全部投入底池，之後無須再下注。



在「翻牌前」下注結束後，假使有至少兩名玩家未蓋牌，為防止作弊，發牌人須先將牌堆的最上面一張牌作廢覆蓋於牌桌上（此動作稱為銷牌（Burn Card）），再於牌桌上發出並同時翻開三張公共牌，然後開始第二輪（「翻牌」，flop）下注。這一輪及其後的下注，都是由發牌人後第一個尚未蓋牌的玩家開始，以順時針方向繼續進行喊注。

「翻牌」下注結束後，發牌人須再銷牌後，發出另一張公共牌，稱為「轉牌」（turn）（或「第四街」），開始第三輪下注。然後發牌人須再銷牌，發出最後一張公共牌，稱為「河牌」（river）（或「第五街」），之後開始第四輪下注。如有多於一名以上的玩家未蓋牌持續到最後則須攤牌比大小（showdown）。



下注形式

標準德州撲克遊戲盲注的位置，小盲注與大盲注緊接於發牌者之後。

德州撲克通常規定大小兩個盲注（也可兼用底注（**ante**）（三），特別在是撲克賽較後階段）。坐在發牌人（**dealer**）位置的玩家，前面有按鈕作標示。發牌人按鈕每局以順時針方向移動一個位置，發牌人和盲注位置隨之變動。位於發牌人順時針方向次一位置的玩家須下小盲注（**small blind**），金額等於大盲注（**big blind**）的一半。小盲注玩家的下一家的玩家須下大盲注，金額等於最低下注額。

術語解釋(三)：

底注（**Ante**）

有些撲克遊戲除了盲注還有「底注」，如七張梭哈。進一步解釋，底注是指牌局開始時，所有玩家都必須投入底池的小額籌碼。德州撲克通常沒有底注，但是有些無限注德州撲克錦標賽的後段會要求玩家下底注。



在撲克比賽中，盲注/底注的金額會隨時間逐漸提高。有時大小盲注有不同比例，例如大小盲注分別為15元和10元也十分正常。

如只剩兩名玩家，「一對一」（heads-up）特別規則會生效，盲注的位置會有所不同。在這個情況下，發牌人下小盲注，而他的對手須下大盲注，只有第一輪由發牌者先叫注，翻牌後的各輪皆由大盲注先行叫注。



德州撲克大小依序為：

同花大順 > 同花順 > 四條 > 葫蘆 > 同花 > 順子 > 三條 > 兩對 > 一對 > 散牌。

德州撲克大小與一般撲克牌型相似，例如：梭哈、十三張、換牌撲克等等的撲克牌遊戲。但牌型大小不分花色，玩家有可能平手，從大到小比牌（如：都有一對，數字大的勝出；數字相同，則是剩下的雜牌一張張比數字大小）。若五張比完大小相同，則均分彩池內的籌碼。



- 同花大順（皇家同花順，**Royal Straight Flush**）

同花色的A，K，Q，J和10。

平手牌：公牌開出同花大順，則所有未蓋牌的玩家平手平分籌碼。

- 同花順（**Straight Flush**）

五張同花色的連續數字牌。同時有同花順時，數字最大者為贏家。

平手牌：公牌開出同花順為最大時，則所有未蓋牌的玩家平手平分籌碼。

- 四條（鐵支，**Four of a kind**）

其中四張是相同數字的撲克牌，第五張是剩下牌組中最大的一張牌。若有一家以上持有四條（公牌開出四條），則比較第五張牌（起腳牌），最大者為贏家。

平手牌：公牌開出四條時，最後一張雜牌（或稱為**kicker**、次大牌、踢腳牌，一副牌型組合中剩下來沒有用作湊牌型的牌，用於牌型相同時比大小）數字也相同時。



- 葫蘆（滿堂紅，**Full house**）

由三張相同數字及任何兩張其他相同數字的撲克牌組成，如果同時有多人拿到葫蘆，三張相同數字中數字較大者為贏家。如果三張牌都一樣，則再比兩張牌中數字較大者贏家。

平手牌：五張牌數字都一樣，則平分彩池。

- 同花（**Flush**）

此牌由五張不按順序但相同花色的撲克牌組成，如果不止一人有此牌組，則牌面數字最大的人贏得該局，如果最大數字相同，則由第二、第三、第四或者第五張牌來決定勝負。

平手牌：公牌的同花就是最大的同花牌型時，平分彩池。

- 順子（**Straight**）

此牌由五張連續數字撲克牌組成，如果不止一人有此牌組，則五張牌中數字最大的贏得此局，10-J-Q-K-A為最大的順子，A-2-3-4-5為最小的順子。

平手牌：如果五張牌數字都相同，平分彩池。



▪ 三條 (Three of a kind)

由三張相同數字和兩張不同數字的撲克牌組成，如果不止一人有此牌組，則三張牌中數字者最大贏得該局，如果三張牌數字大小相同，則比較不同點數的兩張牌中數字較大者，若相同時再比第五張，數字大的人贏。

平手牌：如果五張牌數字都相同，則平分彩池。

▪ 兩對 (Two pair)

兩對數字相同但兩兩不同的撲克和一張雜牌組成，共五張牌。

平手牌：如果不止一人持有此牌型，持有數字比較大的對子者為贏家，若較大數字對子相同，則比較小對子的數字，如果兩對對子數字都相同，那麼第五張牌 (kicker) 數字較大者贏。如果連第五張牌數字也相同，則平分彩池。



- 一對 (One pair)

由兩張相同數字的撲克牌和另三張無法組成牌型的雜牌組成。

平手牌：如果不止一人持有此牌型，則持有較大數字對子者為贏家，如果對牌數字相同，則依序比較剩下的三張牌，數字最大者為贏家，如果五張牌都一樣，則平分彩池。

- 散牌 (高牌, High card, No-pair, Zitch)

無法組成以上任一牌型的雜牌。

平手牌：如果不止一人抓到此牌，則比較數字最大者，如果數字最大的相同，則依序比較第二、第三、第四和第五大的，如果五張牌都相同，則平分彩池。



德州撲克的牌型與機率

- 52張中的7張意味著你在7張牌中選擇5張形成一手牌。在德州撲克中，它由兩張底牌和五張公共牌組成。這樣計算出的機率將更加精確 - 但要注意，從52張牌中拿出5張的計算機率的方式實際上是一樣的，並且它更容易計算



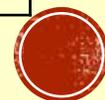
(此為52張中取7張)

牌型	英文	組合	機率	多少手牌會出現1次
同花大順	royal flush	4,324	0.0001539%	30940
同花順	straight flush	37,260	0.0013852%	3590
四條、鐵支	four of a kind	224,848	0.0240096%	595
葫蘆、滿堂紅	full house	3,473,184	0.1440576%	39
同花	flush	4,047,644	0.1965402%	33
順子	straight	6,180,020	0.3924647%	22
三條	three of a kind	6,461,620	0.1128451%	11
兩對	two pair	31,433,400	2.1128451%	4
一對	one pair	58,627,800	4.7539016%	2.2
散牌	high card	23,294,460	42.2569028%	4.7
總數	Total	133,784,560	100.0000000%	



(此為52張中取5張)

牌型	組合	機率
同花大順	4	0.0001539%
同花順	36	0.0013852%
四條、鐵支	624	0.0240096%
葫蘆、滿堂紅	3,744	0.1440576%
同花	5,108	0.1965402%
順子	10,200	0.3924647%
三條	54,912	2.1128451%
兩對	123,552	4.7539016%
一對	1,098,240	42.2569028%
散牌	1,302,540	50.1177394%
總數	2,598,960	100.0000000%



計算方法如下：

五張牌共有2,598,960種牌面組合

$$C_5^{52}=2598960$$

1.同花大順是由同種花色的A,K,Q,J,10五張牌所組成

$$C_1^1 \times C_1^4 = 4$$

2.同花順是同花大順外五張同花色的連續牌

$$C_1^{10} \times C_1^4 - 4(\text{同花順}) = 36$$

3.四條是由四張牌點相同的牌，另加一張不同牌點的牌所組成

$$C_1^{13} \times C_1^4 \times C_1^{12} \times C_1^4 = 624$$

$$C_1^{13} \times C_4^4 \times C_1^{48} = 624$$

4.葫蘆是由三張牌點相同的牌，另加兩張同牌點的牌所組成

$$C_1^{13} \times C_3^4 \times C_1^{12} \times C_2^4 = 3744$$

5.同花是由同一花色但非連號的五張牌組成

$$C_5^{13} \times C_1^4 - 4(\text{同花大順}) - 36(\text{同花順}) = 5108$$



6. 順子是由連號但非同花的五張牌組成

$$C_1^{10} \times (C_1^4)^5 - 4(\text{同花大順}) - 36(\text{同花順}) = 10200$$

7. 三條為三張牌點相同的牌，另加兩張不同牌點的牌

$$C_1^{13} \times C_3^4 \times C_2^{12} \times (C_1^4)^5 = 54912$$

8. 兩對為兩組不同牌點的牌各兩張，另加一張不同牌點的牌

$$C_2^{13} \times (C_2^4)^2 \times C_1^{11} \times C_1^4 = 123552$$

9. 一對為兩張一樣牌點的牌，另加三張不同牌點的牌

$$C_1^{13} \times C_2^4 \times C_2^{13} \times (C_1^4)^3 = 1098240$$

10. 散牌為上述九種牌組以外的牌

$$(C_5^{13} - 10) \times (4^5 - 4) = 1302540$$



賽局理論

出處網址:

(<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BA%B3%E4%BB%80%E5%9D%87%E8%A1%A1>)

- 又譯為對策論或博弈論,是經濟學的一個分支,1944年馮·諾伊曼與奧斯卡·摩根斯特恩合著《賽局理論與經濟行為》,標誌著現代系統賽局理論的初步形成,因此他被稱為「賽局理論之父」。賽局理論被認為是20世紀經濟學最偉大的成果之一。目前可以應用在生物學、經濟學、國際關係、計算機科學、政治學、軍事戰略,研究遊戲或者賽局內的相互作用。是研究具有鬥爭或敵對性質現象的數學理論和方法。也是運籌學的一個重要學科。現代的賽局理論的源頭是約翰·馮·諾伊曼對於雙人零和賽局的混合策略均衡點的發想和證明。



- 賽局理論考慮遊戲中的個體的預測行為和實際行為，並研究它們的優化策略。表面上不同的相互作用可能表現出相似的激勵結構(incentive structure)，所以它們是同一個遊戲的特例。其中一個有名有趣的應用例子是(囚犯困境)。
- 具有競爭或對抗性質的行為稱為賽局行為。
- 在這類行為中，參加鬥爭或競爭的各方各自具有不同的目標或利益。為了達到各自的目標和利益，各方必須考慮對手的各種可能的行動方案，並力圖選取對自己最為有利或最為合理的方案。比如日常生活中的下棋，打牌等。賽局理論就是研究賽局行為中鬥爭各方是否存在著最合理的行為方案，以及如何找到這個合理的行為方案的數學理論和方法。



納許均衡

參考網址:

<http://member.get.com.tw/coursera/DetailAudition.aspx?l=1&iT=1&ipd=3&ikm=1443&iKMFile=49>

如果每個參與者都選擇了自己的策略,並且沒有玩家可以透過改變策略而其他參與者保持不變而獲益,那麼當前的策略選擇的集合及其相應的結果構成了納許均衡。

(換句話說 在對方玩家的每個策略下,自己所選擇具有最大收益的策略

$$P_i(S) = \max_{(r_i)} [P_i(S; r_i)]$$



動/靜態賽局

- 若賽局中,參與者有意識的在前一參與者行動後才進行行動,此稱動態賽局。
- 若所有參與者同時行動則稱為靜態賽局。



混合策略

- 如果雙方採取的最佳策略不是在策略中擇一,而是在不同策略中各採取「一定的機率」,此種策略即稱為混合策略
- 若參賽者的策略之中某一策略的每種結果相較於其他收益來的更好則該策略稱為純策略(優勢策略)



以賽局理論解釋德州撲克：

- 因為有先後順序加註或過牌的問題,因此在德州撲克這種博奕遊戲屬於動態賽局
- 解釋方式:站在旁觀者的角度去探討我與該局和牌時存留的參賽者去比較
- 策略:僅考慮棄牌與過牌(含加注)兩種策略
- 算收益的方法: $(\text{所有玩家下注總金額}) \times (\text{勝率}) - (\text{該玩家的實際下注金額})$



德州撲克實例：(翻牌圈)

 	玩家 1 的手牌
 	玩家 2 的手牌
  	公共牌
玩家	胜率 (包括平局)
1	37.07%
2	64.14%

我方(玩家1):勝率37%

對方(玩家2):勝率64%

(勝率計算:<https://viegg.com/texas/cn.html>)

假設 每人底注:50 加注:x

在兩方都已過牌或加注此略的收益:

我方: $0.37(100+2x)-(50+x)=-13-0.26x$

對方: $0.64(100+2x)-(50+x)=14+0.28x$



德州撲克實例：(翻牌圈)

我方 \ 對方	過牌/加註	棄牌
過牌/加注	$(-13 - 0.26x, 14 + 0.28x)$	$(50, -50)$
棄牌	$(-50, 50)$	$(-50, -50)$

備注(在已知兩方牌面的情況下):

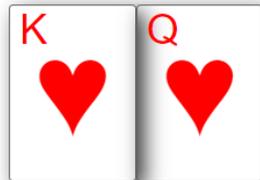
1. (紅字)無法比較誰收益相對高,若 $x \geq 142.307$ 時,則納許均衡為我方棄牌策略與對方加注的策略,我方棄牌收益可能會相較於加注收益相對高

$$-13 - 0.26x > -50 \quad \rightarrow \quad -0.26x > -37 \quad \rightarrow \quad x < 142.307$$

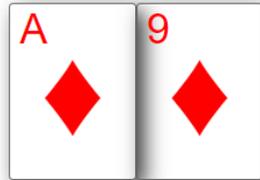
2. 因為對方加註的策略相較於棄牌策略優勢,因此對方只會考慮加注的策略



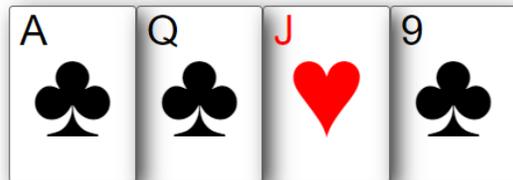
德州撲克實例：(轉牌圈)



玩家 1 的手牌



玩家 2 的手牌



公共牌

玩家	胜率 (包括平局)
1	13.64%
2	86.36%

我方(玩家1):勝率13%

對方(玩家2):勝率86%

(勝率計算:<https://viegg.com/texas/cn.html>)

假設前幾輪每人已下注:1000 加注:y

在兩方都已過牌或加注此略的收益:

我方: $0.13(2000+2y)-(1000+y)=-720-0.27y$

對方: $0.86(2000+2y)-(1000+y)=720+0.72y$



德州撲克實例：(轉牌圈)

我方 \ 對方	過牌/加註	棄牌
過牌/加注	$(-720 - 0.72y, 720 + 0.72y)$	$(1000, -1000)$
棄牌	$(-1000, 1000)$	$(-1000, -1000)$

備注(在已知兩方牌面的情況下):

1. (紅字)無法比較誰收益相對高,若 $y \geq 388.888$ 時,則納許均衡為我方棄牌策略與對方加注的策略,我方棄牌收益可能會相較於加注收益相對高

$$-720 - 0.72y > -1000 \quad \rightarrow \quad -0.72y > -280 \quad \rightarrow \quad y < 388.888$$

2. (同翻牌圈) 因為對方加注的策略相較於棄牌策略優勢,因此對方只會考慮加注的策略

3. 此時河牌圈的公牌必須是10或是Q才贏過對方 $6/44=0.136$



德州撲克實例：(河牌圈)



假設河牌圈兩方底注為5000 加注後為12500

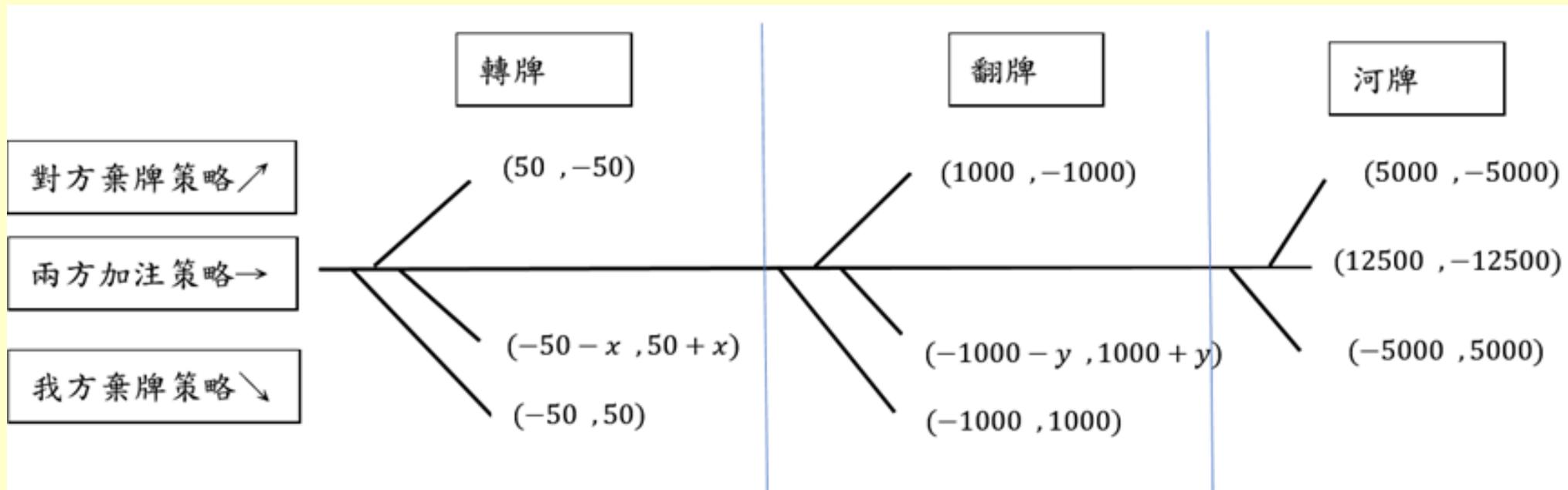
我方 \ 對方	過牌/加注	棄牌
過牌/加注	12500, -12500	5000, -5000
棄牌	-5000, 5000	-5000, -5000

以最終河牌的情形,納什均衡為我方選擇加注策略,對方選擇棄牌策略

圖源:(神來也截圖)



該局博奕遊戲的動態賽局分析



問題: 為什麼僅考慮加注與棄牌的策略?(不考慮加注、跟注、棄牌三種策略?)

Ans: 因為下注是有順序的 只要有一位玩家選擇加注後面就會必須再額外選擇是否跟注,這樣以結果來說就等同於已經下注的總額再加上最後加注的金額(當我家住的金額為0視為僅跟注)



以下為一些基本常見的德州撲克機率數據：

1. 擁有強牌,如兩張手牌是A或K,占
整個起手牌範圍的 $\frac{C_2^4 + C_2^4}{C_2^{52}} = \frac{12}{1326} = 2.1\%$ 。

2. 翻牌後,你的牌加上公共牌一共有4張同花,打到河牌圈時,你中同花的機率 $\frac{C_2^9 + C_1^9 \times C_1^{38}}{C_2^{47}} = \frac{378}{1081} = 34.97\%$



(參考網址: 德州撲克技巧攻略大全 | 十大必勝提升
攻略技巧 | 德州撲克台灣 2021 (pokertaiwan.com))



以下為一些基本常見的德州撲克機率數據：

3. 在翻牌圈,用你不成對的底牌在翻牌上做成與底牌成對的機率為 $1 - \frac{C_3^{44}}{C_3^{50}} = 1 - \frac{13244}{19600} = 32.43\%$ 。

4. 翻牌圈把不成對的兩張底牌,做成兩組對牌的機率為 $\frac{C_1^3 C_1^3 \times C_1^{44}}{C_3^{50}} = \frac{396}{19600} = 2\%$

5. 如果在翻牌上擊中了兩頭順,你到河牌成順子的機會有 $1 - \frac{C_2^{39}}{C_2^{47}} = 31.5\%$



德州撲克下注策略：

- 盲注加注-在盲注的時候,可通過加注來減少對手數量,或直接收了底池。
- 價值押注-通常發生在河牌,下注者通常是有成牌了,為了從對手上榨取最大的價值,可以下一個不是很大的注來吸引對手來跟注。從而贏取對方的籌碼。
- 超大押注-下注者在詐牌,希望自己超大的押注把對手嚇跑從而贏取底池。
- 過牌加注-先通過過牌來示弱,誘使其他人下注,從而來贏取更多的籌碼;
- 防禦押注-當對自己的牌沒有信心,通過下一個1/4到1/2底池大小的押注來阻止對手詐牌。



21點規則一

■ 點數大小



: 1點或11點(由玩家自己決定)



: 10點

其餘牌面面值即點數

資源出處:

[二十一點 - 維基百科，自由的百科全書 \(wikipedia.org\)](https://joshua-lin.com/brain/)

<https://joshua-lin.com/brain/>



術語解釋：

黑傑克(Blackjack，一張Ace加一張10點牌)：只要莊家不是也拿到BJ可以立即獲賠1.5倍的注碼。
(Blackjack > 21點)

拿牌(HIT)：再拿一張牌

停牌(STAND)：不再拿牌



分牌(SPLIT)：若兩張牌的點數相同，玩家可以下一注與原賭注相等的賭金，並將前兩張牌分為兩副單獨的牌。分成兩副牌之後，一張A牌和一張10點牌只能算作21點，不能算作「黑傑克」。

雙倍下注(DOUBLE)：玩家在拿到前兩張牌之後，可以再下一注與原賭注相等的賭金，然後只能再拿一張牌。如果拿到「黑傑克」，則不許雙倍下注。

保險(INSURANCE)：如果莊家牌面朝上的牌是A，玩家可以買保險，也就是相當於原賭注一半的額外賭金。如果莊家有黑傑克，玩家將贏得2倍的保險賭金；如果莊家沒有黑傑克，玩家將輸掉保險賭金，遊戲照常繼續。黑傑克要大於其他總點數為21點的牌。



牌局進行流程

1. 洗牌
2. 向各玩家分別派發一張明牌
3. 莊家發給自己一張明牌
4. 向各玩家派第二張明牌
5. 莊家再發給自己一張暗牌，如果莊家明牌是A，會詢問玩家是否買保險
6. 玩家可進行加注、投降、分牌等動作
7. 莊家逐位詢問閒家是否加牌，該位閒家不加牌才詢問下一位閒家，輪流至最後一位閒家加牌完成
8. 莊家如不足17點便需加牌直至超過或等於17點
(對未有爆牌的玩家，比點數大小，大者勝，可得賠金
;如莊家爆牌、未有爆牌的玩家便可得賠金)
9. 回收已使用的牌



基本策略

要計算在莊家手上，還未發的牌中，有多少大牌如A, K, Q, J, 10。如果莊家手中還有很多大牌，對賭客來說，賭客的贏面會大些。原因如下。

⇒ 賭客拿到Blackjack (A + K, Q, J, 10)的機會大些。

⇒ 莊家容易「爆牌」。

資源出處：

[21點 \(BLACKJACK\) 的基本知識——新手從這裡開始 - 【百家樂教學指南】 \(bac88.net\)](#)



※算牌法：流水數

莊家洗好牌後，流水數是0。莊家每發一張牌，賭客要重新計算流水數。如牌是2, 3, 4, 5, 6，就要將流水數加1。如果牌是7, 8, 9，流水數不變。如果牌是10, J, Q, K, A，流水數就減1。

例子：流水數是0，莊家10，賭客K, Q。運算後，流水數是-3。

例子：流水數是-3，莊家7，賭客2, 3。運算後，流水數是-1。

例子：流水數是-1，莊家4，賭客5, 6。運算後，流水數是+2。

例子：流水數是+2，莊家2，賭客4, 6。運算後，流水數是+5。

當流水數是+5時，賭客的贏面相對會大。



進階策略

我們研究 21 點時藉遊戲規則得出等式如下：

$P(\text{玩家獲勝}) = P(\text{莊家爆} \cap \text{玩家沒爆}) + P(\text{莊家沒爆} \cap \text{玩家沒爆} \cap \text{玩家手牌點數} > \text{莊家手牌點數})$

因此，我們決定針對玩家硬牌 16 點、莊家明牌 10 點的情況(玩家在遊戲進行時，只會看到莊家的明牌)，討論其 Hit 和 Stand 時的情況：

玩家若 Stand：

此時玩家總點數為16點，遊戲進入莊家行動的環節。分析後發現，無論莊家最後點數為何，我們都能歸納成下列兩種情況：

其一：若莊家沒有爆→莊家點數必大於 16(根據規則，莊家點數小於16時要加牌)→莊家勝

其二：若莊家爆了→玩家勝。

故針對勝率，我們只需討論莊家明牌為10的情況下，其爆與不爆的機率，討論如下



- 1、當莊家第二張牌為7、8、9、X、A，莊家 Stand、不爆，此機率為 $\frac{8}{13}$ 。
- 2、當莊家第二張牌為6，莊家 Hit：
 - (1) 當莊家第三張牌為6、7、8、9、X，莊家爆，此機率為 $\frac{8}{13^2}$ 。
 - (2) 當莊家第三張牌為A、2、3、4、5，莊家 Stand、不爆，此機率為 $\frac{5}{13^2}$ 。
- 3、當莊家第二張牌為5，莊家 Hit：
 - (1) 當莊家第三張牌為7、8、9、X，莊家爆，此機率為 $\frac{7}{13}$ 。
 - (2) 當莊家第三張牌為2、3、4、5、6，莊家 Stand、不爆，此機率為 $\frac{5}{13^2}$ 。
 - (3) 當莊家第三張牌為A，莊家 Hit，由於點數和(2)時相同，皆為 16 點，故其後之機率等同(2)算出之機率再乘上 $\frac{1}{13}$ ，即莊家爆之機率為 $\frac{8}{13^3}$ ；不爆之機率為 $\frac{5}{13^3}$ 。
 - (4) 得莊家爆之機率為 $\frac{99}{169}$ ；莊家不爆(獲勝)之機率為 $\frac{70}{169}$ 。



4、當莊家第二張牌為4，莊家 Hit：

(1) 當莊家第三張牌為8、9、X，莊家爆，此機率為 $\frac{6}{13}$ 。

(2) 當莊家第三張牌為3、4、5、6、7，莊家 Stand、不爆，此機率為 $\frac{5}{13^2}$ 。

(3) 當莊家第三張牌為2，莊家 Hit，其後之機率等同(2)算出之機率再乘上 $\frac{1}{13}$ ，即莊家爆之機率為 $\frac{8}{13^3}$ ；不爆之機率為 $\frac{5}{13^3}$ 。

(4) 當莊家第三張牌為A，莊家 Hit，其後之機率等同(3)算出之機率再乘上 $\frac{1}{13}$ ，即莊家爆之機率為 $\frac{99}{13^3}$ ；不爆之機率為 $\frac{70}{13^3}$ 。

(5) 得莊家爆之機率為 $\frac{1217}{2197}$ ；莊家不爆之機率為 $\frac{980}{2197}$ 。



5、當莊家第二張牌為3，莊家 Hit：

(1) 當莊家第三張牌為9、X，莊家爆，此機率為 $\frac{5}{13}$ 。

(2) 當莊家第三張牌為4、5、6、7、8，莊家 Stand、不爆，此機率為 $\frac{5}{13^2}$ 。

(3) 當莊家第三張牌為3，莊家Hit，其後之機率等同(2)算出之機率再乘上 $\frac{1}{13}$ ，即莊家爆之機率為 $\frac{8}{13^3}$ ；不爆之機率為 $\frac{5}{13^3}$ 。

(4) 當莊家第三張牌為2，莊家Hit，其後之機率等同(3)算出之機率再乘上 $\frac{1}{13}$ ，即莊家爆之機率為 $\frac{99}{13^3}$ ；不爆之機率為 $\frac{70}{13^3}$ 。

(5) 當莊家第三張牌為A，莊家Hit，其後之機率等同(4)算出之機率再乘上 $\frac{1}{13}$ ，即莊家爆之機率為 $\frac{1217}{13^4}$ ；不爆之機率為 $\frac{980}{13^4}$ 。

(6) 得莊家爆之機率為 $\frac{14841}{28561}$ ；莊家不爆之機率為 $\frac{13720}{28561}$ 。



6、當莊家第二張牌為2，莊家 Hit：

(1) 當莊家第三張牌為X，莊家爆，此機率為 $\frac{4}{13}$ 。

(2) 當莊家第三張牌為5、6、7、8、9，莊家 Stand、不爆，此機率為 $\frac{5}{13^2}$ 。

(3) 當莊家第三張牌為4，莊家 Hit，其後之機率等同(2)算出之機率再乘上 $\frac{1}{13}$ ，即莊家爆之機率為 $\frac{8}{13^3}$ ；不爆之機率為 $\frac{5}{13^3}$ 。

(4) 當莊家第三張牌為3，莊家 Hit，其後之機率等同(3)算出之機率再乘上 $\frac{1}{13}$ ，即莊家爆之機率為 $\frac{99}{13^3}$ ；不爆之機率為 $\frac{70}{13^3}$ 。

(5) 當莊家第三張牌為2，莊家 Hit，其後之機率等同(4)算出之機率再乘上 $\frac{1}{13}$ ，即莊家爆之機率為 $\frac{1217}{13^4}$ ；不爆之機率為 $\frac{980}{13^4}$ 。

(6) 當莊家第三張牌為A，莊家 Hit，其後之機率等同(5)算出之機率再乘上 $\frac{1}{13}$ ，即爆之機率為 $\frac{14841}{13^5}$ ；不爆之機率為 $\frac{13720}{13^5}$ 。

(7) 得莊家爆之機率為 $\frac{179213}{371293}$ ；莊家不爆之機率為 $\frac{192080}{371293}$ 。

7、加總以上機率，莊家爆之機率為 21.21%；不爆之機率為 78.79%；玩家勝率減敗率的差為-57.58%。



報告結束 謝謝大家

