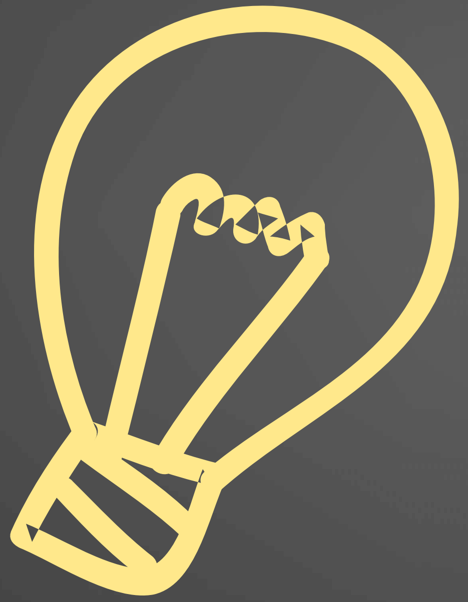
畢達哥拉斯

數四甲　410631122　黃翊瑄
數四甲　410631128　葉宗愿
數四乙　410531226　王怡堯
數四乙　410631207　唐仲暄



目錄

01.畢達哥拉斯&其學派

畢達哥拉斯生平

西元前六世紀出生於愛琴海上的薩摩斯島

古希臘的哲學家和數學家

年輕時曾到埃及和巴比倫遊學

在義大利的一場城市暴動中被暗殺

在義大利的南部傳授數學及哲學思想

組成畢達哥拉斯學派

畢達哥拉斯學派

成員有十多名女性

畢達哥拉斯認為女人和男人一樣有求知的權利

信奉「萬物皆數」

崇拜整數、分數，研究自然數和有理數，用有理數解釋了天地萬物

完美數6　、28

認為上帝因為6是完美的，所以選擇以6天創造萬物
月亮繞行地球一周約為28天

重要發現—畢氏定理

在直角三角形中，兩股長的平方和等於斜邊長的平方

畢氏定理

於畢達哥拉斯一千年以前就在使用，由畢達哥拉斯證明了定理的普遍性

又稱勾股定理、商高定理、新娘座椅定理或百牛定理

重要發現─無理數的發現

由畢氏得學生希帕索斯發現

當時畢達哥拉斯學派信奉「萬物皆數」，引起畢氏不滿，將學生淹死

引發了第一次數學危機

最後由希臘人歐多克索斯透過「比例論」，解決了無理數的問題

02.畢氏定理 - 三元數

畢氏三元數

滿足方程式$a^2+b^2=c^2$的任何一組正整數解答(a,b,c)就叫做畢氏三元數，例如常見的直角三角形比例(3,4,5)、(5,12,13)、(7,24,25)等皆為畢氏三元數。

畢氏三元數生成公式

甲：畢氏公式

$$\begin{cases} a = 2n + 1 \\ b = 2n^2 + 2n \\ c = 2n^2 + 2n + 1 \end{cases}$$

乙：柏拉圖公式

$$\begin{cases} a = 2n \\ b = n^2 - 1 \\ c = n^2 + 1 \end{cases}$$

丙：歐氏公式

$$\begin{cases} a = l(u^2 - v^2) \\ b = 2luv \\ c = l(u^2 + v^2) \end{cases}$$

甲：畢氏公式

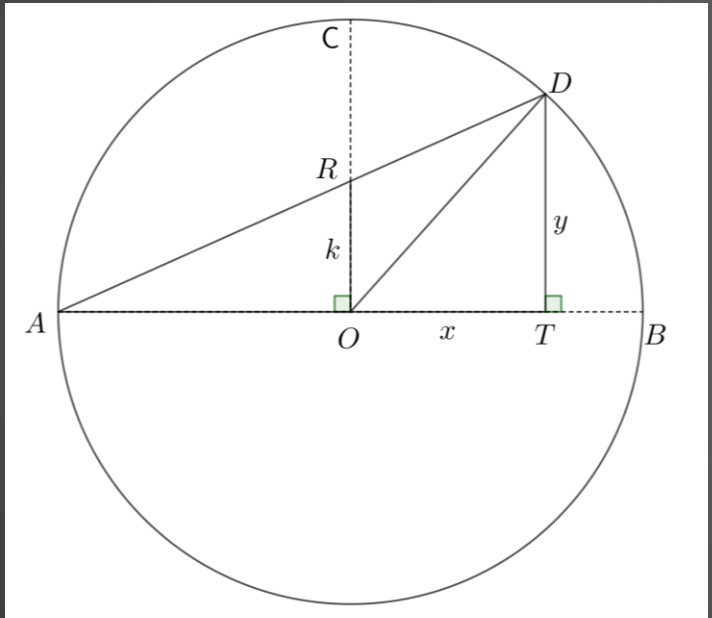
- $(k-1)^2 = k^2 - 2k + 1 \rightarrow (k-1)^2 + (2k-1) = k^2$
- 假設$2\mathrm{k} - 1 = m^2$也就是說$k = \frac{m^2+1}{2}$
- 再將$k = \frac{m^2+1}{2}$代入上式得到$m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$
- 就可得到$\begin{cases} a = 2n+1 \\ b = 2n^2 + 2n \\ c = 2n^2 + 2n + 1 \end{cases}$

乙：柏拉圖公式

- 透過等式$(k+1)^2=(k-1)^2+4k$,
- 假設$4k=(2n)^2$代入
- 可得$(n^2+1)^2=(n^2-1)^2+(2n)^2$

- 亦即$\begin{cases} a=2n \\ b=n^2-1 \\ c=n^2+1 \end{cases}$

丙：歐氏公式

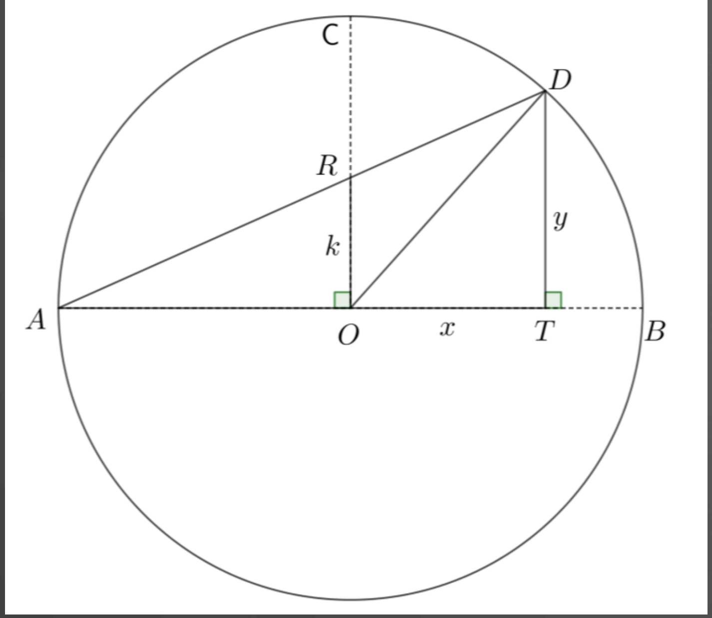


- 上圖，點A、B、C、D位在以O為圓心半徑為L的圓上，不失一般性，以下運算過程皆以半徑為1運算
- 假設：

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = 1$

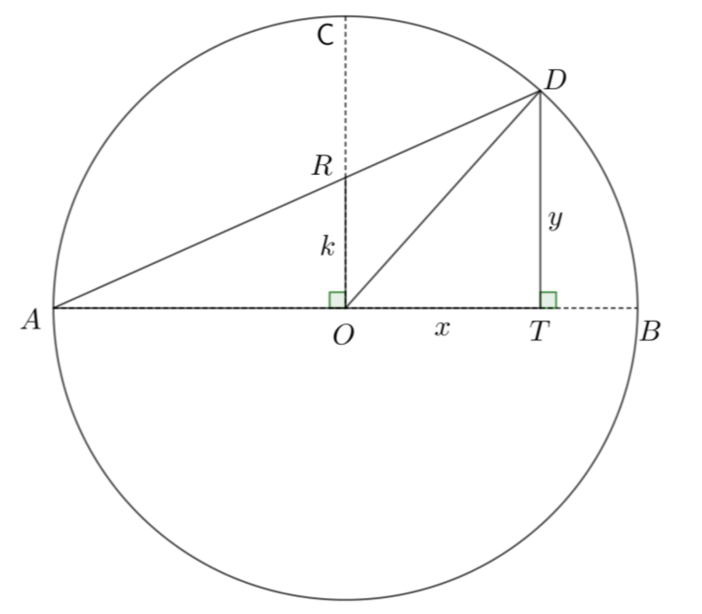
$\overline{OT} = x$, $\overline{OR} = k$, $\overline{\mathrm{DT}} = y$

丙：歐氏公式



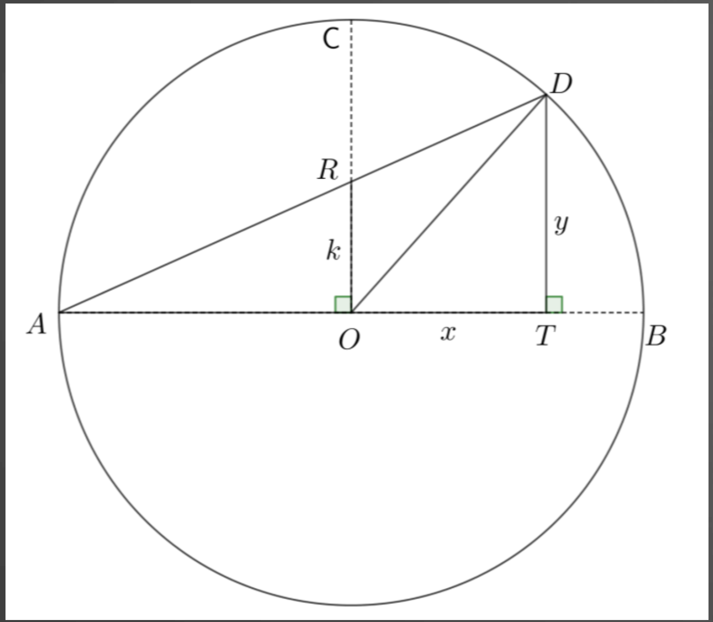
- ΔATD相似ΔAOR
- 所以$\frac{\overline{\mathrm{DT}}}{\overline{\mathrm{RO}}} = \frac{\overline{\mathrm{DA}}}{\overline{\mathrm{AR}}} = \frac{\overline{\mathrm{AT}}}{\overline{\mathrm{AO}}} = \frac{y}{k} = \frac{x+1}{1}$
- 且ΔOTD為直角三角形
- $\begin{cases} y = k(x+1) \\ 1 = x^2 + y^2 \end{cases}$

丙：歐氏公式



- $\begin{cases} y = k(x+1) \\ 1 = x^2 + y^2 \end{cases}$
- $x = \frac{k^2-1}{k^2+1},\ y = \frac{2k}{k^2+1}$
- 設$k = \frac{v}{u}$代入
- $x = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2},\ y = \frac{2uv}{u^2+v^2}$
- $\rightarrow 1 = \left(\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{2uv}{u^2+v^2}\right)^2$

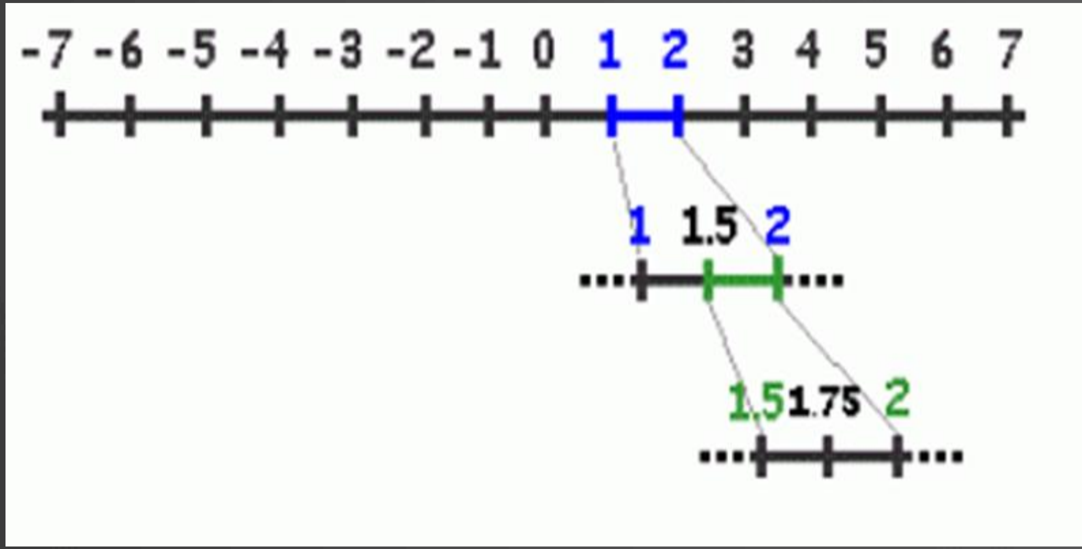
丙：歐氏公式

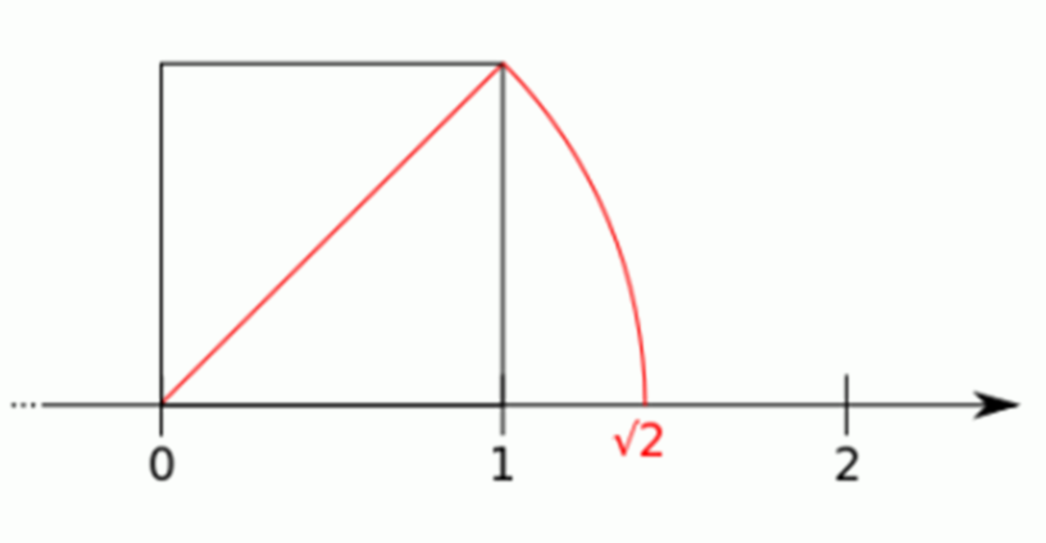


- $\rightarrow 1 = \left(\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{2uv}{u^2+v^2}\right)^2$
- $\rightarrow (u^2+v^2)^2 = (u^2-v^2)^2 + (2uv)^2$
- 將半徑L乘回去即得 $\begin{cases} a = l(u^2-v^2) \\ b = 2luv \\ c = l(u^2+v^2) \end{cases}$

03.第一次數學危機

萬物皆數





不為有理數

若$\sqrt{2}$為有理數，則可以寫成$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$其中a,b為互質自然數

兩邊平方得到$a^2=2b^2$，所以a為偶數，可以表示成$a=2m$

代回上式可得$2b^2=a^2=4m^2$，可得b亦為偶數

因此a,b不互質，矛盾

$\sqrt{2}$不為有理數

比例論

原畢達哥拉斯學派裡的比例論

如果兩個物體的比例是相同的，以數學式來表示，是一個等比關係

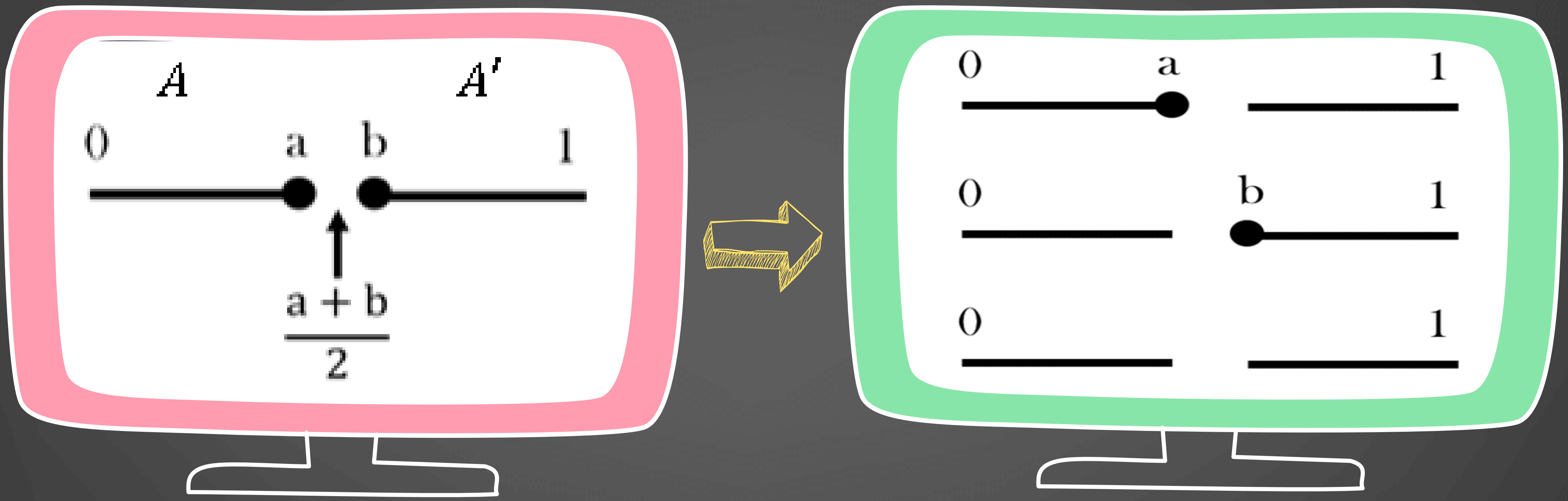
$a:b=c:d$ 其中a,b,c,d為正整數，且存在正整數n使得$a=nc$與$b=nd$

Eudoxus 的比例論

$a:b=c:d \Leftrightarrow (ma<nb \Rightarrow mc<nd, ma=nb \Rightarrow mc=nd,$
$ma>nb \Rightarrow mc>nd)$

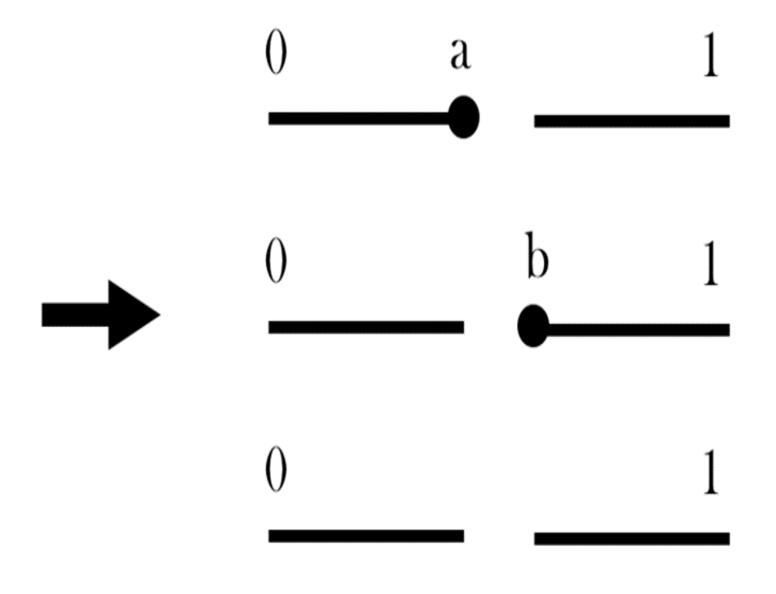
這個定義迴避了數系的規範，因此，即使a,b,c,d是無理數，等比關係也可以成立。

戴德金分割



在[0,1]有理數的數線上剪一刀，第三種情況，這個〝空隙〞所對應的數既不屬於A，也不屬於A'，因此它不是有理數，它所對應的數就是無理數

戴德金分割例子



1.將所有≤0的有理數劃分為集合 A，將所有剩下的有理數劃分為集合A'，則屬於分類中的第1種情形。

2.將所有<0的有理數劃分為集合 A ，將所有餘下的有理數（即大於或等於0的有理數）劃分為集合 A'，屬於分類中的第2種情形。

3.將所有≤0、或其平方≤3的正有理數劃分到集合 A ，將剩下的有理數（即其平方大於3的正有理數）劃分到集合 A ，屬於分類中的第3種情形，此時定義了無理數$\sqrt{3}$ 。

04. CMO 2005 競賽題目 第二題

CMO 2005 題目

Let (a, b, c) be a Pythagorean triple, i.e., a triplet of positive integers with $a^2+b^2=c^2$.

(a)Prove that $(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2 > 8$.

(b) Prove that there does not exist any integer n for which we can find a Pythagorean triple (a, b, c) satisfying $(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2 = n$.

令(a,b,c)為畢氏三元數，正整數的三元組，其中 $a^2+b^2=c^2$

(a)證明$(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2 > 8$

(b)證明不存在任何整數 n 可以找到滿足$(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2 = n$的畢氏三元組$(a,b,c)$

(a) 解法一

令(a,b,c)為畢氏三元數，令θ為a,c的夾角，得

$$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2=\left(\frac{1}{sin\theta}+\frac{1}{cos\theta}\right)^2=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2sin\theta cos\theta}{(\sin\theta\cos\theta)^2}=4\left(\frac{1+sin2\theta}{\sin^2 2\theta}\right)=\frac{4}{\sin^2 2\theta}+\frac{4}{sin2\theta}$$

因為0 <θ< 90 º，得到 0 < sin 2θ ≤ 1，在θ = 45º時會等於8

但當a=b時我們得到√2 = c/a，與a,c為整數矛盾，也就是0 < sin 2θ < 1⇒ $\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2 > 8$

(a) 解法二

利用算幾幾何不等式，得到

$$\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)^2=c^2\left(\frac{a+b}{ab}\right)^2=\frac{(a^2+b^2)(a+b)^2}{a^2b^2}\geq\frac{2\sqrt{a^2b^2}(2\sqrt{ab})^2}{a^2b^2}=8,$$

只有在$a=b$時等於8，用方法一的想法，一樣與a不等於b矛盾。

(b) 解法

因為$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$是有理數，$(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2$只在$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$為整數時才為整數。

假設 $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}= m, \gcd(a,b) = 1$。因為$c(a+b) = mab$ 且$\gcd(a,a+b) = 1$。

a一定可以整除c，設$c = ak$。可得$a^2+b^2 = a^2k^2 \Rightarrow b^2 = (k^2-1)\,a^2$。

與$\gcd(a,b) = 1$矛盾，故$(\frac{c}{a}+\frac{c}{b})^2$不為整數。

謝謝大家