期末報告

410631210高浚洋
410831224王皓正
410631214吳承遠

介紹

大約兩年前，三位物理學家在研究中微子震盪時，偶然間發現了新的用來解特徵值以及特徵向量的辦法(雖然在事後似乎有人發現19世紀時就有人提出這個辦法，但沒有大量宣傳，在本篇不做討論)，他們立即將他們的發現傳給陶哲軒請求他幫忙證明。陶哲軒提出三種證明法之後連同三位物理學家發表了一篇論文。

報告大致介紹了微中子與線性代數的關係以及其證明，內容牽扯到許多量子力學的觀念，可以說量子力學就是線性代數的延伸。注意：本篇內容中所使用的機率與一般我們所學的統計上的機率不同，為物理上的機率。報告內對微中子的講解也以對沒學過量子力學的人容易理解的方式進行，並非完全正確以及嚴謹的。

微中子震盪與線性代數

用矩陣表示微中子的震盪

微中子有三種分別用三種不同的向量來描述，這三種都不是正常的energy eigen state，是eigen state的super position(疊加態)，因為薛丁格方程會決定一個vector在希爾伯特空間的隨時間演化，且薛丁格方程的演化與能量有關，Basis是energy eigen state 所以basis不變，所以我們可

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U^*_{\alpha i} |\nu_i\rangle$$

U是linear transformation 的過程(可以看到他由三個旋轉矩陣組成，代表他有三個旋轉方向)

Vi(i=1 2 3)是三個basis vector

Vi經過U這個linear transformation 會產生Vα

U即為某個微中子震盪到另一個微中子的機率

PMNS矩陣(微中子震盪矩陣)

$$U = \begin{bmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\alpha_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\alpha_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最後面的矩陣要在微中子是Majorana particle時成立所以暫不討論

Majorana particle這個粒子跟他的反粒子一樣

從特徵值到特徵向量

今有一n×n hermitan matrix A有特徵值 $\lambda_i(A)$ 與特徵向量Vi且我們將第i個特徵向量當中的第j個元素記為VI,j又有一A (n-1)×(n-1)之子矩陣M。M是將A的第j行與第j列消除而得

先說最後的結果

$$|v_{i,j}|^2 \prod_{k=1;k\neq i}^{n} (\lambda_i(A) - \lambda_k(A)) = \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_i(A) - \lambda_k(M_j)) .$$

Example

今有一矩陣A=[1，3][3，9]我們可以算出其特徵值為0與10

根據公式 V1,1的平方會=(10-9)/10-0=1/10

 V1,2的平方會=(10-0)/10-0=9/10

也就是說V1=<1,3>，<1,-3>

同理應用到V2可得<3,1>，<3,-1>

第一個證明[引理]

Cauchy-binet定理

B為一n×n-1之矩陣

這裡有一個特殊的

前提便是A必須有一

特徵值為0在證明中

更將她設定為第n個

Lemma 1. *Let one eigenvalue of A be zero, WLOG we can set $\lambda_n(A) = 0$. Then,*

$$\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i(A) |\det(B \quad v_n)|^2 = \det(B^* AB)\,, \tag{1}$$

for any $n \times n-1$ matrix B.

Proof. If we diagonalize $A = VDV^*$ where $D \equiv \mathrm{diag}(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_{n-1}(A), 0)$ and make the replacements $B \to V^* B$ and $v_n \to V^* v_n = e_n$, we can assume that $A = D$ and $v_n = e_n$. Write $B = \binom{B'}{X}$ where B' is the upper $n-1 \times n-1$ submatrix and X is some $1 \times n-1$ vector, then we find that both sides of eq. 1 are equal to $\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i(A) |\det(B')|^2$. $\square$

另外證明還將B換成一(n-1)×(n-1)在之後的證明可以當作submatrix 用

結論最後左式與右式都會=圖片左下角那個東東(我不會打那個算式)

證明第二階段

由於第一段的前提前提必須要有一個特徵值為0為了改善這項限制第二段直接把第n個特徵證明也說了這樣會改變其餘的特徵值

$$(2) \qquad |v_{i,j}|^2 \prod_{k=1;k\neq i}^{n} (\lambda_i(A) - \lambda_k(A)) = \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_i(A) - \lambda_k(M_j)) \ .$$

This result was noted in [DPZ19] *and is related to a result in* [ESY07, TV11].

Proof. WLOG we take $j = 1$ and $i = n$. We shift A by $\lambda_n(A)I_n$ so that $\lambda_n(A) = 0$; this also shifts all the remaining eigenvalues of A as well as those of M_j, then eq. 2

第三階段

等式右邊可以

becomes,

$$|v_{n,1}|^2 \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k(A) = \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k(M_1)\,. \tag{3}$$

用第一階段的引

Note that the RHS of eq. 3 is $\det(M_1)$.

Next, we apply Lemma 1 for the case where $B = \binom{0}{I_{n-1}}$. We find that the LHS of eq. 1 is $\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i(A)|v_{n,1}|^2$ and the RHS of eq. 1 is $\det(M_1)$ giving the result. $\square$

理並使B第一列為零其餘皆為單位矩陣第一階段的左式對應到此式的右式

用伴隨矩陣證明

We provide an alternate proof of Lemma 2 using adjugate matrices.

Proof. For any λ not an eigenvalue of A,

$$\mathrm{adj}(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - A)(\lambda I_n - A)^{-1}\,, \tag{4}$$

which leads to

$$\mathrm{adj}(\lambda I_n - A)v_j = \det(\lambda I_n - A)(\lambda - \lambda_j(A))^{-1}v_j = \prod_{k=1;k\neq j}^{n} (\lambda - \lambda_k(A))v_j\,, \tag{5}$$

for $j \in [1, n]$. Thus the v_j provide an orthonormal eigenbasis for $\mathrm{adj}(\lambda I_n - A)$. Then,

$$\mathrm{adj}(\lambda I_n - A) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1;k\neq j}^{n} (\lambda - \lambda_k(A))v_j v_j^*\,. \tag{6}$$

By taking the limit $\lambda \to \lambda_i(A)$ all but one of the summands on the RHS vanishes,

$$\mathrm{adj}(\lambda_i(A)I_n - A) = \prod_{k=1;k\neq i}^{n} (\lambda_i(A) - \lambda_k(A))v_i v_i^*\,. \tag{7}$$

The diagonal elements on the RHS of eq. 7 provide the LHS of eq. 2. By the definition of the adjugate, the diagonal elements on the LHS of eq. 7 are the determinants of the submatrices of $\lambda_i(A)I_n - A$ which is the RHS of eq. 2 completing the proof. $\square$

(4)為伴隨矩陣的性質，接著我們讓兩邊同乘特徵向量vj

$(\lambda In-A)*vj=\lambda vj-\lambda jvj$ $(\lambda In-A)^{-1}*vj=(\lambda-\lambda j)^{-1}*vj$

再應用det()=特徵值連乘 $\det(\lambda I-A)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$ 得到(5)

取特徵向量v1,v2,...,vn作為標準正交基 $\Sigma_n(v_j v_j^*)=I$

對(5)乘vj*後連加得(6)，取λ为λj得(7)成立

因此(7)左邊伴隨矩陣的對角元素也等於右邊的對角元素(就是我們想要的平方賦范特徵向量)，根據伴隨矩陣的定義

方阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 的各元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵 A^* ：

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{matrix}$$

该矩阵 A^* 称为矩阵 A 的伴随矩阵 [1] 。

得到(7)左邊伴隨矩陣的對角元素Aii=det(Mi)=$\prod_{k=1}^{n-1}\lambda_k(M_i)$
證明完畢。

稍微帶一下重點

1.針對共軛對稱矩陣
2.求的是平方賦范特徵向量
3.僅通過特徵值和主子矩陣的特徵值求解
4.揭示了特徵值和特徵向量之間的關西

感謝聆聽