數學解題方法 作業一

Canadian Mathematical Olympiad 1994

第一組

410631111 數四甲 林佳儀

410631135 數四甲 孔儀馨

410631226 數四乙 白元亦

410731238 數三乙 呂若慈

410731239 數三乙 江晏淳

目錄

CONTENTS

PART 1

題目翻譯

01 主題分析:代數主題

計算 $$\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}$$

02 主題分析:代數主題

試證明對於$(\sqrt{2}-1)$的任何正整數次方，都可化簡成對於某一正整數m的$\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$形式。

(例如:$(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}$)。

03 主題分析:數論主題

二十五個人男生坐在一張圓桌旁。每小時都有一次投票，每個人都必須回答是或否。
每個人的行為如下:在第n票中，如果他的回應與他左右兩個人中，至少一個的回應相同，那麼他第(n + 1)次的回應要與第n次相同;但是如果他的回應與他的鄰居在第n次不同，那麼他第(n + 1)次的回應要與他第n次回應不同。

證明:當每個人在第一票上都做出了回應後，沒有人的回應會改變。

04 主題分析：幾何主題

直線AB為圓Ω的直徑，P為任一點不在直線AB上的點。假設有一直線過P點與A點交圓Ω於U點，另一線過P點與B點交圓Ω於V點。假設
$|PU|=s|PA|$，$|PV|=t|PB|$，s,t為非負實數。

請根據s和t確定∠APB的餘弦值。

令△ABC為一個銳角三角形，$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，H為 $\overline{AD}$ 上任一點，連接 $\overline{BH}$ 和 $\overline{CH}$ 並延長，使它們分別交 $\overline{AC}$ 和 $\overline{AB}$ 於E、F點。
證明∠EDH=∠FDH。

PART 2

題目講解

講解題目四

直線AB為圓Ω的直徑，P為任一點不在直線AB上的點。假設有一直線過P點與A點交圓Ω於U點，另一線過P點與B點交圓Ω於V點。假設 $|PU|=s|PA|$，$|PV|=t|PB|$，s,t為非負實數。

請根據s和t確定∠APB的餘弦值。

講解題目四

Case 1: If P is outside Ω (see figures I, II, and III), then since $\angle AUB = \angle AVB = \pi/2$, we have

$$\cos(\angle APB) = \frac{PU}{PB} = \frac{PV}{PA} = \sqrt{\frac{PU}{PA}\cdot\frac{PV}{PB}} = \sqrt{st}.$$

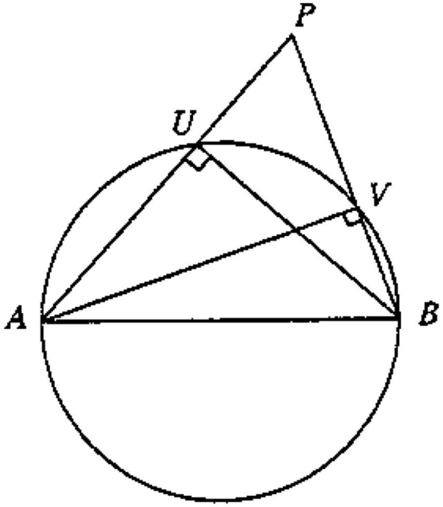

Figure I

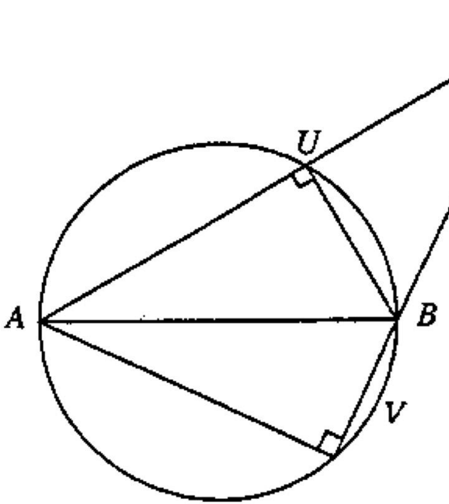

Figure II

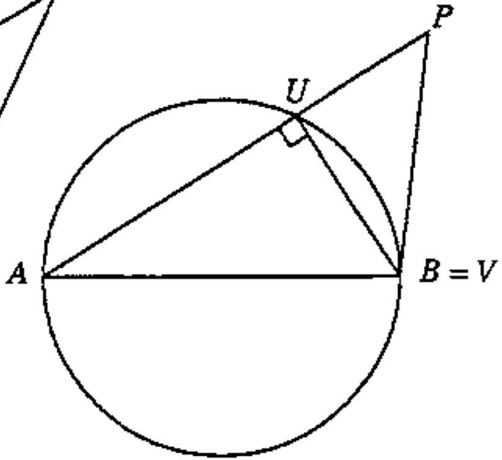

Figure III

Case 2: If P is on Ω (see figure IV), then

$$P = U = V \Rightarrow PU = PV = 0 \Rightarrow s = t = 0.$$

Since $\angle APB = \pi/2$, $\cos(\angle APB) = 0 = \sqrt{st}$ holds again.

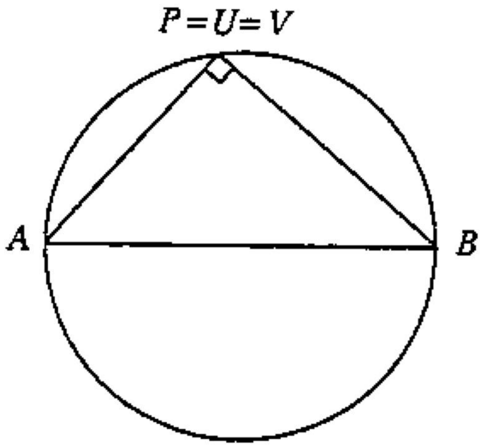

Figure IV

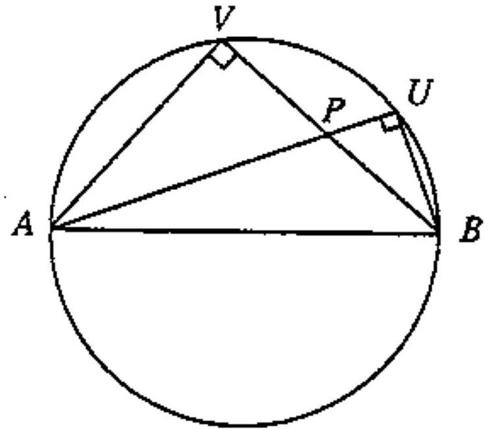

Figure V

Case 3: If P is inside Ω (figure V), then

$$\cos(\angle APB) = \cos(\pi - \angle APV) = -\cos(\angle APV) = -\frac{PV}{PA},$$

and

$$\cos(\angle APB) = \cos(\pi - \angle BPU) = -\cos(\angle BPU) = -\frac{PU}{PB}.$$

Therefore $\cos(\angle APB) = -\sqrt{\frac{PU}{PA} \cdot \frac{PV}{PB}} = -\sqrt{st}.$

感謝聆聽

THANK YOU FOR WATCHING