1

有多少組正整數 X,Y 在 X 小於等於 Y 的狀況下 使得最大公因數 gcd(x,y)=5! 和最小公倍數 lcd(x,y)=50!

Note: gcd(x,y)表示 x 與 y 的最大公因數 lcd(x,y)表示 x 與 y 的最小公倍數

n!=n x (n-1) x ・・・ x 2 x1

2.

閉區間 A = [0,50]是有限數個閉區間的聯集，每段長度為 1。請證明有些區間可以被移除讓剩餘區間互不相交且總長度大於等於 25。

NOTE: 當 a<b 時，閉區間[a,b]: $\{x \in R: a \le x \le b\}$的長度為 $b-a$；不相交區間們沒有交點。

3.

證明$\frac{1}{1999} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot \cdots\cdots \cdot\frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$

令 $P=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot \cdots\cdots \cdot\frac{1997}{1998}$

$\because \frac{1}{2} > \frac{1}{3}\ ,\frac{3}{4} > \frac{3}{5}\cdot \cdots\cdots \cdot\frac{1997}{1998} > \frac{1997}{1999}$

$\therefore P > \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot \cdots\cdots \cdot\frac{1997}{1999} = \frac{1}{1999}$

且$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}\ ,\frac{3}{4} < \frac{4}{5}\cdot \cdots\cdots \cdot\frac{1997}{1998} < \frac{1998}{1999}$

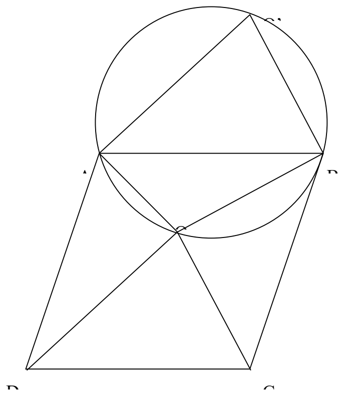
$\Rightarrow P < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot \cdots\cdots \cdot\frac{1998}{1999} = (\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot \cdots\cdots \cdot\frac{1998}{1997})\cdot\frac{1}{1999} = \frac{1}{P}\cdot\frac{1}{1999}$

$\Rightarrow P^2 < \frac{1}{1999} < \frac{1}{1936} = \frac{1}{44^2} \Rightarrow P < \frac{1}{44}$

$\Rightarrow \frac{1}{1999} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot \cdots\cdots \cdot\frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$

4.

點 O 落在平行四邊形 ABCD 上，使得角 AOB 加角 COD 等於一百八十度，證明角 OBC 等於角 ODC



5.

求和

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{k^3 + 9k^2 + 26k + 24}$$

並表示 $\frac{p(n)}{q(n)}$ 的形式，其中 p 和 q 是整係數多項式