THE 1998 CANADIAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

1. (代數主題)確認方程式的實數解 a

$$\left[\frac{1}{2}\right]a+\left[\frac{1}{3}\right]a+\left[\frac{1}{5}\right]a=a$$

在此，如果 x 是實數，則[x]表示小於或等於 x 的最大整數解。

2. (代數主題)找到所有的實數 X

$$X=\left(X-\frac{1}{X}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{1}{X}\right)^{\frac{1}{2}}$$

3.(代數主題) n 是一個自然數且 n 大於等於 2，試證明

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots.+\frac{1}{2n-1}\right)$$
$$>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots.+\frac{1}{2n}\right)$$

4.(幾何主題) 設 ABC 為∠BAC=40°和∠ABC=60°的三角形，設 D 和 E 為分別位於 AC 和 AB 線段上的點，使∠CBD=40°和∠BCE=70°，F 是線 BD 和 CE 的交點。證明線段 AF 與線段 BC 垂直。

5.(代數主題) 令 m 為正整數。定義一個數列 a0,a1,a2 ,... 且 a0=0，a1=m，

$a_{n+1} = m^2 a_n - a_{n-1}$,n=1,2,3,...... 。證明有序對 (a,b) 對 a≤b 的非負整數給出方程式的解

: $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = m^2$,若且唯若 (a,b) 符合型式

(a_n, a_{n-1})對於 n≥0