第 1 題(數論)
在中午 12:00，Anne，Beth 和 Carmen 開始在全長 300 米的圓形軌道上繞圈，所有軌道都從軌道上的同一點開始。
每個慢跑者在不確定的時間段內在兩個可能的方向之一中保持恆定的速度。
證明如果 Anne 的速度不同於其他兩個速度，那麼 Anne 將在以後的某個時間與其他賽跑者至少相距一百米。
（此處，距離是沿著分隔兩個滑道的兩個弧線中較短的一個進行測量的。）

解 1：以圓圈軌道上，我們可以假設 Anne 的速度為零(Anne 當定點)，Beth 的運行速度至少與 Carmen 一樣快，並且 Carmen 的速度為正。
如果 Beth 的速度不超過 Carmen 的兩倍，那麼當 Carmen 行駛 100 米時，兩者都離 Anne 至少 100 米。
如果 Beth 的運行速度是 Carmen 的兩倍，那麼 Beth 在 Carmen 運行 100 至 200 米之間的時間段會跑 200 多米。其中某部分距離 Anne 100 多米，此時 Beth 和 Carmen 至少（實際）距離 Anne100 米。

解 2：以圓圈軌道上，我們可以假定 Anne 的速度等於零(Anne 當定點)，而其他兩個跑步者的速度都不為零。我們可以假設 Beth 的運行速度至少與 Carmen 一樣快。假設 Beth 跑 200 米需要 t 秒鐘。然後，在任何時候，在無窮集合中 T = {t，2t，4t，8t•・・・}，Beth 恰好距離 Anne 100 米。
在時間 t 處，Carmen 正好經過了 d 米，其中 0 <d≤200。令 k 為最小整數，使 2kd≥100。然後 k≥0 且 100≤2kd≤200，因此在 Beth 和 Carmen 時均為 2kt∈T 距 Anne 至少 100 米。

第二題（數列）

一個整數數列，1901，1902，……，2000，是一個序列 $a_1, a_2, ..., a_{100}$ 每個數字分別對應各個序數，不會重複。我們假設一個數列Ｓ，符合下列規定：

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \dots,\ s_{100} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}.$$

求此數列Ｓ有多少種排列方法全無法被３整除？

解答：

$\{1901, 1902, \dots, 2000\} = R_0 \cup R_1 \cup R_2$ ，R_i 為被３整除的餘數。

$|R_0| = |R_1| = 33$ 以及 $|R_2| = 34.$ 將數列Ｓ轉換成數列 $S' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_{100})$

，Ｓ'為Ｓ被３除的餘數。

為了避免被３整除，將此數列由６７個１跟２組成，會像是 1,1,2,1,2,……,1,2 或是 2,2,1,2,1,……,2,1。由於$|R_2|=|R_1|+1$, 只有 2,2,1,2,1,……,2,1 為可能。剩下的３３個零可能在Ｓ' = $(a'_1, a'_2, \dots, a'_{100})$ ，a'_1 不等於０。有$\binom{99}{33}=\frac{99!}{33!66!}$種方式去選擇Ｓ' 為０，也就是說$\binom{99}{33}$種數列Ｓ' 不會被３整除。因此我們得知滿足以上條件的Ｓ有$\binom{99}{33}33!\,33!\,34!=\frac{99!33!34!}{66!} \approx 4.4(10^{138})$

第三題：數論

令A =（a_1，a_2，...，a_{2000}）是一個整數序列，每個整數均落在區間[-1000, 1000]中。假設A中的項總和為1。證明A的一些非空子序列的總和為零。

評論：該學生發現這個問題最困難的是平均成績為0.51，並且在100篇論文中只有一個完美的解決方案。

解：我們可以假設A的每一項都不為零，否則我們就完成了。透過一次從A中選擇元素，我們將A排序為新列表B=（b_1，...，b_{2000}），使得$b_1 > 0$，$b_2 < 0$，並且對於每個$i = 2, 3,$。..，2000，b_i的符號與部分和的符號相反 $s_{i-1} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{i-1}$。

（我們可以假設每個$s_{i-i} \neq 0$，否則我們就做完了。）在選擇過程的每個步驟中，都保證存在b_i的候選對象，因為條件$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2000} = 1$ 意味著A中未選擇的條目之和為零或具有與s_{i-1}相反的符號。

從定義它們的方式來看，s_1，s_2，⋯，s_{2000}中的每個都是區間[-999，1000]中的1999個非零整數之一。根據鴿籠原理，對於某些j，k滿足 $1 \leq j < k \leq 2000$，$s_j = s_k$。因此，$b_{j+1} + b_{j+2} + \cdots + b_k = 0$，我們完成了工作。

4.（代數）

令 ABCD 是一個凸四邊形，已知

∠CBD = 2 ∠ADB

∠ABD = 2 ∠CDB

且 AB = CB

試證 AD = CD

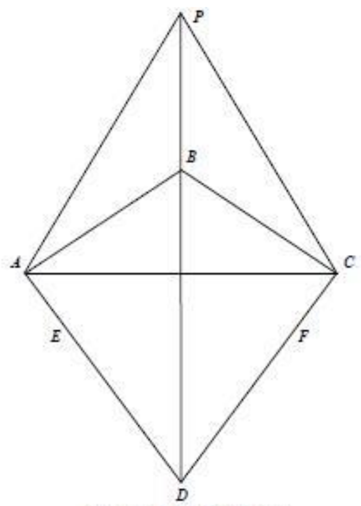

Diagram for Solution 1

(解)

以 B 為中心的圓且通過點 A 和點 C ，DB 延伸至圓上的點 P

∠CPD = 1/2∠CBD= ∠ADB

∠APD = 1/2∠ABD= ∠CDB

因此 APCD 是平行四邊形。PD 將 AC 平分，所以 BD 是∠ABC 的角分平分線

已知

∠ADB =1/2∠CBD =1/2∠ABD = ∠CDB

因此 DB 是∠ADC 的角平分線，並 DB 將 AC 平分，

所以此三角形必為等腰三角

故 AD = CD。

5.

假設實數a_1, a_2,..., a_{100}滿足:

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{100} \geq 0$$
$$a_1 + a_2 \leq 100$$
$$a_3 + a_4 + \cdots + a_{100} \leq 100.$$

找出 $a_1^2+a_2^2+\ldots\ldots+a_{100}^2$ 的最大可能值，並找到符合其最大值之數列$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{100}$的所有可能。

註解:所有正確的解法對變數來說都包含一個可調整的數列，任何一個滿足以上限制條件並增加的 $a_1^2+a_2^2+\ldots\ldots+a_{100}^2$，最終都會推到以下這兩種最佳的數列:
100,0,0,......,0 以及 50,50,50,50,0,0,......,0，也許在大膽猜測最佳值為100^2之後，證明將呼之欲出。

解決方案:已知$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} \leq 200$, 所以

$$\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+\ldots\ldots+a_{100}^2 &\leq (100-a_2^2)+a_2^2+a_3^2+\ldots\ldots+a_{100}^2 \\ &= 100^2-200a_2+2a_2^2+a_3^2+\ldots\ldots+a_{100}^2 \\ &\leq 100^2-(a_1 + a_2 + \cdots + a_{100})\ a_2+2a_2^2+a_3^2+\ldots\ldots+a_{100}^2 \\ &= 100^2+(a_2^2-a_1a_2)+(\ a_3^2-a_3a_2)+(a_4^2\text{-}a_4a_2)+\ldots\ldots+(a_{100}^2\text{-}a_{100}a_2) \\ &= 100^2+(a_2\text{-}a_1)\ a_2+(a_3\text{-}a_2)\ a_3+(a_4\text{-}a_2)\ a_4+\ldots\ldots+(a_{100}\text{-}\ a_2)a_{100} \end{aligned}$$

又因為 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{100} \geq 0$，沒有任何一個 $(a_i\text{-}a_j)\ a_i$為正。所以支持

$a_1^2+a_2^2+\ldots\ldots+a_{100}^2 \leq 10000$ 若且唯若

$$a_1 = 100\text{-}a_2 \quad \text{and} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 200$$

每一個

$$(a_2\text{-}a_1)\ a_2, (a_3\text{-}a_2)\ a_3, (a_4\text{-}a_2)\ a_4,\ldots\ldots, (a_{100}\text{-}\ a_2)a_{100}$$

皆為 0。因為 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{100} \geq 0$，最後一種情況支持若且唯若 i ≥1，
已知$a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_{100} = 0$，當 i=1，我們將會得到 100, 0, 0,......, 0 這個答案。
當 i ≥2，那麼從$a_1 + a_2 = 100$，可得到 i=4 並且第二最佳解為 50,50,50,50,0,0,......,0。