

第八組

2001

數四甲	410631122	黃翊瑄
數四甲	410631128	葉宗愿
數四乙	410531226	王怡堯
數四乙	410631207	唐仲暄



1. 數論主題

Randy: 嗨 Rachel, 給我一個有趣的一元二次方程式, 讓我算出它的根。

Rachel: 有個方程式的兩根屬於正整數, 其中一個是我的年齡, 另一個是我弟弟 Jimmy 的年齡。

Randy: 太棒了! 讓我想想看你跟 Jimmy 的年紀, 這裡的係數都是整數應該不會太難吧。哦對了, 我還發現三個係數加起來是質數。

Rachel: 有意思, 那現在算出我幾歲吧。

Randy: 我會先猜你的年齡, 用你的二次方程式的 X 代替, 怎麼算出來是 -55 而不是 0 。

Rachel: 哦我的天...

(a) 證明 Jimmy 的年齡是兩歲。

(b) 算出 Rachel 的年齡。



2. 組合題型

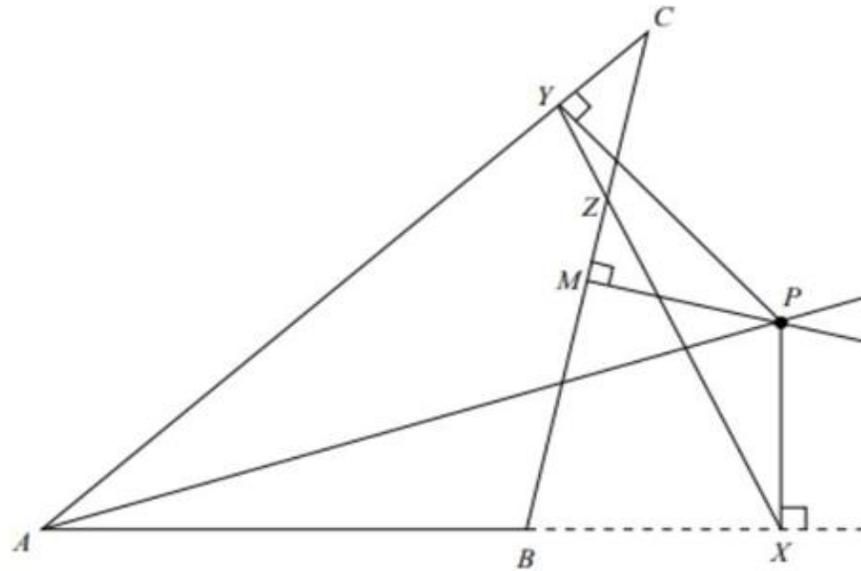
下面的表格被編號從-10到10。每個格子都被填上紅色或白色，被塗上紅色的格子的號碼總和是 n 。Maureen 隨機選個一個格子將他記成0。然後她擲一個公正的硬幣10次，當擲到正面，就將她選的格子往右一格，而擲到反面，則往左一格。在第十次擲完，停在紅色格子的機率是有理數可表示成 a/b 。如果 $a+b=2001$ ，算出 n 的最大值。

-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----



3.幾何主題

下圖三角形ABC中， $\overline{AC} > \overline{AB}$ ，且 \overline{BC} 的垂直平分線和角A的角平分線的交點為P。在 \overline{AB} 延伸線上畫點X和 \overline{AC} 線上畫點Y，使得 \overline{PX} 垂直於 \overline{AB} 且 \overline{PY} 垂直於 \overline{AC} 。Z為 \overline{XY} 和 \overline{BC} 的交點。計算 $\overline{BZ} / \overline{ZC}$ 。



4. 數論主題

n 為正整數，Nancy 畫了一個表格且每格都是正整數，她只能做下列兩個動作：

(a) 選擇其中一行並將該行中的每格數字乘以 n 。

(b) 選擇其中一列並將該行中的每格數字減去 n 。

找出滿足以下條件的 n 的所有可能值：

給定任意表格，在有限的操作下能使每格的數字都變 0。



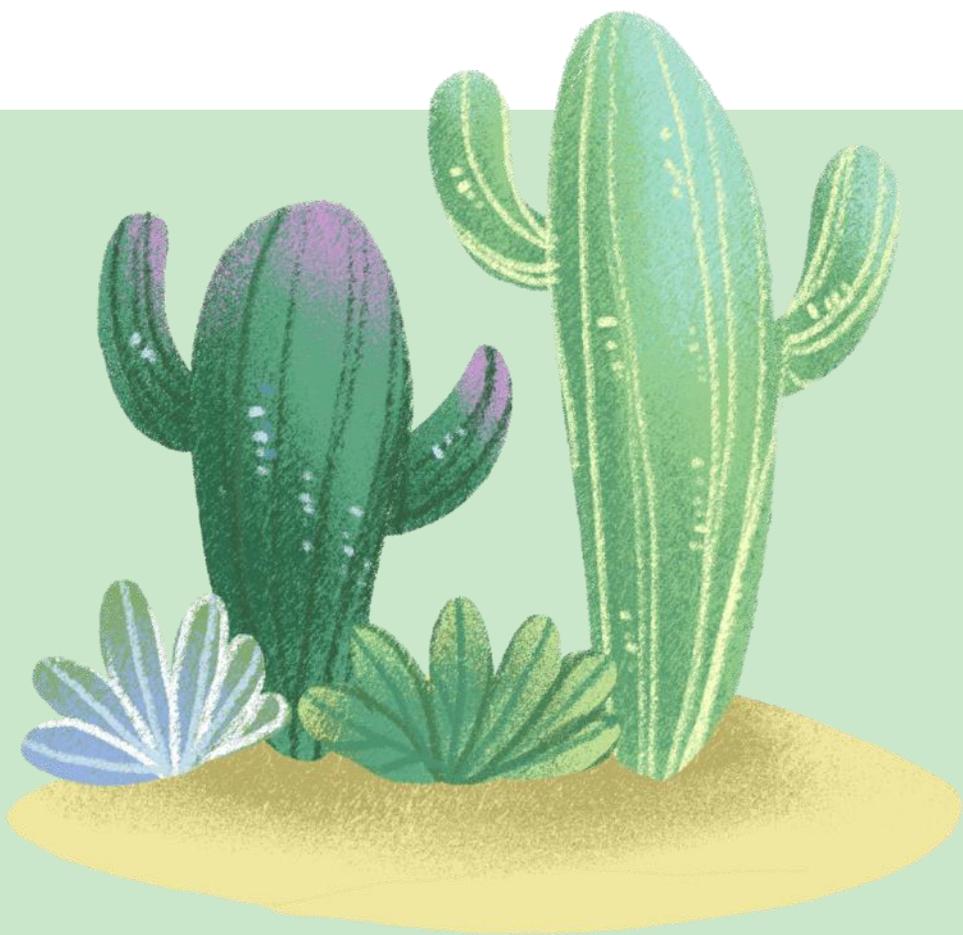
5. 幾何主題

給定 P_0 、 P_1 、 P_2 在一個半徑為1的圓周上三點，且 $\overline{P_1P_2} = t < 2$ 。定義 P_i 為三角形 $P_{i-1}P_{i-2}P_{i-3}$ 外接圓的中心。

(a) 證明 P_1 、 P_5 、 P_9 、 P_{13} 、.....共線。

(b) 設 X 和 Y 分別為 P_1 到 P_{1001} 和 P_{1001} 到 P_{2001} 的距離。定義所有的值 t ，滿足 $500\sqrt{x/y}$ 都是整數。





謝謝大家

