數學思維與解題
CMO2002

410631214吳承遠
410631210高浚洋

第五題

- Let N = {0,1,2,...}.
- Determine all functions
- f : N → N such that xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2)for all x and y in N.

- 翻譯：對於所有正整數**x,y**，我們可以找到所有的**N**到**N**都滿足
- xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2)。

解法

- 先假設f為常數函數且存在x,y使得$f(x)<f(y)$使得$f(y)-f(x)>0$且極小。
- 可以得到
- $f(x) =[xf(x) + yf(x)]/ (x+y)<$
- $[xf(y) + yf(x)] /(x+y)<[xf(y) + yf(y)]/(x+y)= f(y)$
- 因此可以推導出
- $f(x) < f(x^2 + y^2) < f(y)$
- 且$0 < f(x^2 + y*2) – f(x) < f(y) – f(x)$
- 到這裡我們可以證明f的確是常數函數
- 而既然f(0)在N裡面，我們可以確定函數值屬於N

- 呈上，對於所有**N**裡面的**c**，
- 那麼對於所有**x,y**屬於**N,xc+yc=(x+y)c**
- 因此我們可以得到**f(x)=c**
- **c** 屬於**N**即為該等式的所有解

第二題

- 假設今有一正整數我們假設所有小於等於此數之正整數可以被寫成此正整數之因子之和

- 解法：設此正整數為k且有二正整數p,q小於k使得
- K=ap+b. 設a小於p. b則小於q
- 由於p q皆為實數 我們可以根據題目寫成
- a=c1+c2+c3....
- b=d1+d2+d3...題目定理已說C跟D是p與q之因子
- 原式可寫成
- （c1+c2+c3...)p+(d1+d2+d3...)已知Cp與D之所有數可以整除pq
- D所有數皆小於q又小於ac之所有數根據定理又之Cp與D之所有數皆是唯一可得pq為實數