



第五組 2007 CMO

組員:余仕弘 陳冠豪 史雲天 計宇璠 曾泓鈞

1. 在一個 8×9 的西洋棋盤上放 2×1 骨牌，其中6個如圖被放好，每一個骨牌必須水平或是垂直的放置以便覆蓋兩個鄰近的板子，請問最多能放置幾個骨牌？

2. 給你一對三角形，其中：

(a) 一個三角形的兩邊與另外一個三角形的兩邊等長

(b) 這兩個三角形相似，但不一定全等

試證：這兩個相似三角形的相似對應邊的邊長比例介於 $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ 和 $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$

如果三角形是等腰的，那麼它們必須是全等的，並且期望的比率是**1**。因為，如果他們分享等邊長度，一個三角形上至少有一個邊長對應於另一個三角形上的相同長度。如果他們共享不等邊長，則等邊對應或不等邊在兩個方向上對應，比率為**1**，這在範圍之內。

讓三角形是不等邊的。同一長度不可能是兩者三角形的極限長度（最大或最小）。因此，我們必須有這樣一種情況，即兩個三角形的相應邊長是 $(x; y; z)$ 和 $(y; z; u)$ ，其中 $x < y < z$ 和 $y < z < u$ 。我們得到 $y/x = z/y = u/z = r > 1$ 。因此， $y = rx$ 和 $z = ry = r^2x$

從三角不等式 $z < x + y$ ，我們得到了 $r^2 < 1 + r$ 。自 $r^2 - r - 1 < 0$ 和 $r > 1$ ， $1 < r < \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$

維度的比率從較小三角形到較大三角形為 $1/r$ ，滿足 $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) < 1/r < 1$ 。結果如下

3. 假設 f 是一個其值為實數的函數 $f(x, y) + f(y, -x) \geq f(y + x)$ ， X, Y 屬於實數

- (a) 給出一個滿足條件的非常數多項式
- (b) 對於所有實數 x ，證明 $f(x) \geq 0$

4. 對於兩個實數 a ， b ，其中 ab 不等於 1，定義運算 $*$ 使得

$$a * b = \frac{a + b - 2ab}{1 - ab}$$

從 $n \geq 2$ 的實數列表開始，其項 x 全部滿足 $0 < x < 1$ ，選擇列表中的任意兩個數字 a 和 b ，去除它們並將數字 $a * b$ 放在列表的末尾，從而將其長度減少一倍，重複此過程，直到剩下一個數字。

(a) 證明此數字是相同的不論每階段選的 a b 為何

(b) 假設將 S 中的數字 x 的條件減弱為 $0 < x \leq 1$ ，如果 S 恰好包含一個，會發生什麼？

5. 讓三角形 ABC 的內切圓分別接觸 D ， E 和 F 的邊 BC ， CA 和 AB

令 Γ ， Γ_1 ， Γ_2 和 Γ_3 表示分別為三角形 ABC ， AEF ， BDF 和 CDE 的外接圓。令 Γ 和 Γ_1 在 A 和 P 相交， Γ 和 Γ_2 相交在 B 和 Q ，並且 Γ 和 Γ_3 相交在 C 和 R

- (a) 證明圓 Γ_1 ， Γ_2 和 Γ_3 在同一點相交
- (b) 證明 PD , QE , RF 同時存在

例題：

在Rt $\triangle ABC$ 中， $\angle B=90^\circ$ ，它的內切圓分別與邊BC、CA、AB相切於點D、E、F，連接AD與內切圓相交於另一點P，連接PC、PE、PF、FD，且 $PC \perp PF$ 。

求證：（1） $\triangle PFD \sim \triangle PDC$ ；

（2） $EP / DE = PD / DC$ 。