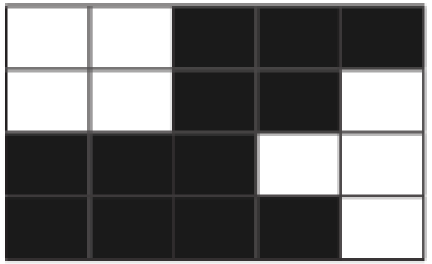
# 第一題

題目：給定一個$m \times n$的網格，其中正方形的顏色為黑色或白色，
如果有一些黑色正方形，它同一行的左邊有白色正方形，
並且上方也有白色正方形，我們就稱黑色正方形擱淺(stranded)。
請為一個$2 \times n$的網格找一個式子，讓黑色正方形沒有擱淺。



這是一個黑色正方形沒有擱淺的$4 \times 5$網格

# 第二題

從紙板上切出兩個不同半徑的圓，每個圓都被細分為200個扇形，其中，100個扇形為白色，另100個扇形為黑色，小一點的圓會放在大一點的圓的上面，讓他們的中心點重合。

證明一個可以旋轉小圓圈，使扇形上的扇形兩個圓圈對齊，小圓圈上的至少有100個扇形位於大圓圈上的顏色相同。

# 第三題(代數)

- $f(x,y,z)=\dfrac{(xy+yz+zx)(x+y+z)}{(x+y)(x+z)(y+z)}$
- 在 $x$、$y$、$z$ 皆是任意正實數的條件下，尋找滿足$f(x,y,z)=r$的集合並證明之($r$屬於任意實數)

# 第四題

找到所有的有序數對 (a, b)，其中 a,b 為整數且 $3^a+7^b$ 為完全平方數

# Ans.

根據題目很明顯a,b是正整數。先假設$3^a$+$7^b$=$n^2$且n為正整數。

利用同餘4的到以下列式：$n^2 \equiv (-1)^a+(-1)^b \pmod 4$

由於沒有平方數和2在除以4之下同餘，所以先分成兩種情況：

(i) a為奇數，b為偶數

(i) a為偶數，b為奇數

情況(i)：設b=2c，則$3^a$=(n-$7^c$)(n+$7^c$)。
觀察後發現3不可以整除n-$7^c$, n+$7^c$，但個別可為3的次方
首先假設n-$7^c$=1，則$3^a$=2× $7^c$+1
假如 c=0，則 a=1。所以得到 a=1, b=0。
所以假設c≥1，則 $3^a$ ≡1(mod 7)。
很明顯的此假設為錯誤的。
因為在整數中最小的a=6，並不符合第一個假設a為奇數，b為偶數。

情況(ii)：設a=2c，則$7^a$=(n-$3^c$)(n+$3^c$)。

觀察後發現7不可以整除n-$3^c$, n+$3^c$，但個別可為7的次方

首先假設n-$3^c$=1 ，則$7^b$=2× $3^c$+1

假如 c=1，則 b=1。所以得到 a=2, b=1。

所以假設c≥1，則 $7^b \equiv 1$(mod 9)。

得知最小的整數b=3，因此假設b=3d，且d為奇數並d≥1。

設y=$7^d$，則$y^3 - 1 = 2 \times 3^c$。得知$2 \times 3^c$=(y-1)($y^2$+y+1)

令(y-1)=2 × $3^u$（u為部分正整數）及$y^2$+y+1=$3^v$（部分v≥2）

但由於3y=($y^2$+y+1)−$(y-1)^2$，所以3整除y（當3無法整除(y-1)時）

# 延伸題

找到所有的有序數對 (a, b)，其中 a,b 為整數且 $2^a + 5^b$為完全平方數。

# Ans.

根據題目很明顯a,b是正整數。先假設$2^a + 5^b = n^2$，且n為正整數。

利用同餘5的到以下列式：$n^2 \equiv 2^a \pmod 5$

此列式蘊含2整除a，所以令c為正整數且整除2c=a。

$(2^2)^c + 5^b = n^2 \Rightarrow 5^b = (n - 2^c)(n + 2^c)$

$(n - 2^c), (n + 2^c)$兩者皆為5的次方
$\exists s, t \in N | b = s + t, s > t, 5^s = n + 2^c, 5^t = n - 2^c$

$5^s = n + 2^c$ （1）

$5^t = n - 2^c$ （2）

將（2）帶入（1）得到$5^s - 5^t = 2 \times 2^c$

將$5^t$提出得到$5^t((5^s \div 5^t) - 1) = 2 \times 2^c$

很明顯5無法整除$2 \times 2^c$，所以t=0且s=b。

因此得知$5^b-1=2\times 2^c$（3）

$5^b-5+2^2=2\times 2^c$（4）

$5^b-5=2\times 2^c-2^2$（5）

$5((5^b\div 5)-1)=2^2((2^c\div 2)-1)$（6）

5| l.h.s of（6）⟹ 5| r.h.s of（6）

由（ 6 ）得知， $5|(2^c\div 2)-1\ \Rightarrow 4|c-1$（7）

l.h.s of（6）≡ 0, 20, 27（mod 31）且 r.h.s of（6）≡ 0, 4,12, 28, 29（mod 31）

使兩邊相等的唯一方法就是整除３１

由於$31|2^2$，所以$31|(2^c\div 2)-1\Rightarrow 5|c-1$（8）

根據（7）和（8）得知 $20|c-1\Rightarrow 25|(2^c\div 2)-1\Rightarrow 5|(5^b\div 5)-1$

故b=1帶入（5）得知c=1，所以a=2，此時的n=3。

# 第五題

在平面上有一個點集合，其性質是集合中任三個點都能以半徑為1的圓覆蓋。

試證明集合中所有的點的都可以半徑為1的圓覆蓋。