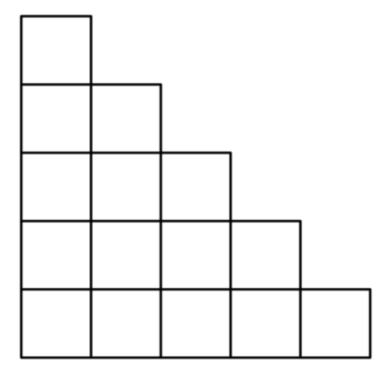
第八組

2010

數四甲	410631122	黃翊瑄
數四甲	410631128	葉宗愿
數四乙	410531226	王怡堯
數四乙	410631207	唐仲暄

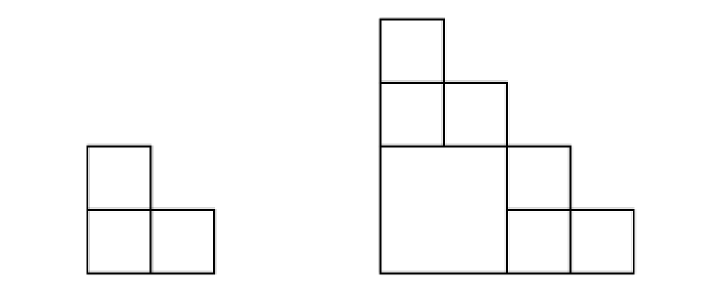
1. 組合主題

對於正整數n，「 n -階梯」是一個由單位方塊組成的圖，第一階有一個方塊，第二階有兩個，以此類推，第 n 皆有 n 個方塊，且所有階的最左邊垂直對齊。例如，左圖為 5-階梯。



$f(n)$表示在n -階梯上要用方形磁磚蓋滿所需要的磁磚數量的最少值。磁磚邊長可已是任意正整數。例如：

$f(2)=3, f(4)=7$。

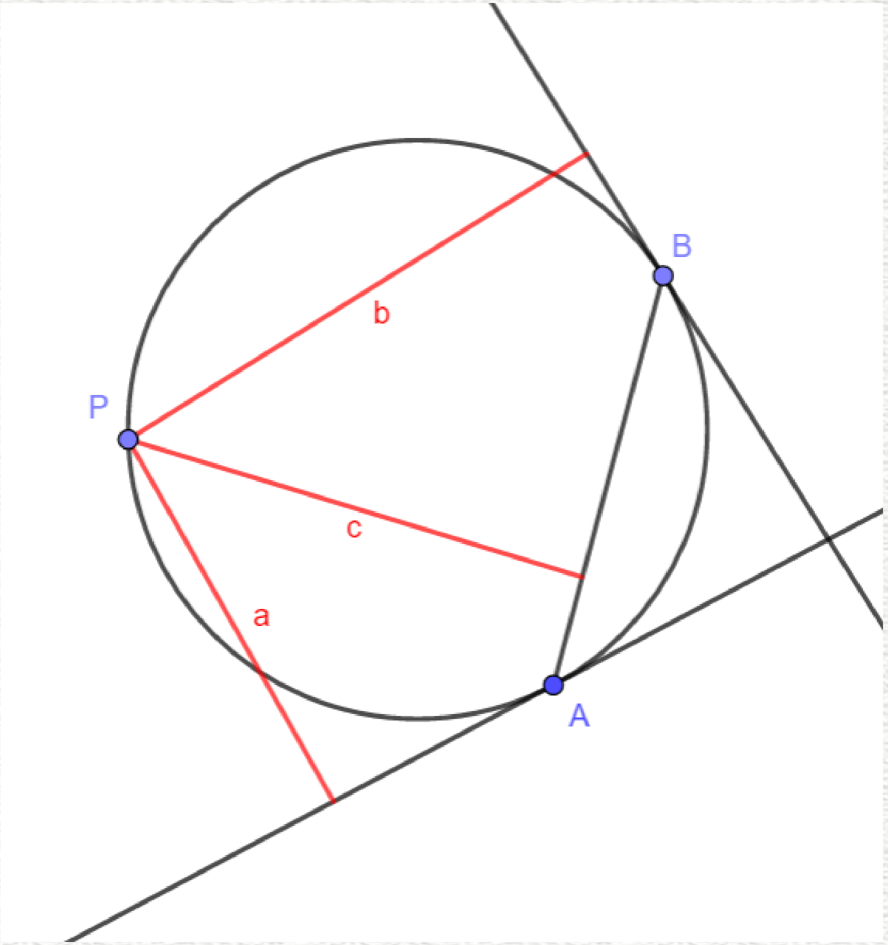


(a)找出所有 n ,滿足 $f(n)=n$.

(b)找出所有 n ,滿足 $f(n)=n+1$.

2. 幾何主題

A,B,P為一圓上的三點，a,b為P到A,B點切線的距離，c為P到弦AB的距離，試證$c^2=ab$。



3. 數論主題

三名選手在一個橢圓溜冰場上競速，他們從同一個起點出發且同方向，但不同速率，他們直到停下來前永遠維持等速率前進 。最慢的1圈/分鐘，最快的 3.14圈/分鐘，第三人

L圈/分鐘，$1 < L < 3.14$。

這場競速會在三人再次交會時結束。找出 L 可能的數量，使得在整場競速中總共發生117次超前（一位選手超越另一位選手，稱作超前，不包括開始與結束。

3. 講解

首先，假設三位選手為A, B, C（快到慢）

考慮A, B相對於C的位子， A, B對於C來說都是跑整數圈（從C的角度）

我們假設A 相對於C 跑了 n 圈，假設 B 相對於 C 跑了 m 圈

考慮A, B相對於C的相對速度，$3.14 - 1 = 2.14$ 為 A 的相對速度 ，$L - 1$為B 的相對速度

他們所花的時間為 $\frac{n}{2.14} = \frac{m}{L-1} \quad \Rightarrow \quad L = 2.14\left(\frac{m}{n}\right) + 1$

我們可以發現我們要的m, n必互質，否則假設 $\gcd(m, n) = k,$
則在A在走m/k, B在走n/k時，A, B, C已經交會一次了

3.
講解

再來考慮超越的發生次數，A相對於B跑了$n-m$圈，而會發生

$n-m-1$次超越（A超越B）。

同理A,B分別會超越C $n-1,m-1$次

$117=(n-1)+(m-1)+(n-m-1)=2n-3 \Rightarrow n=60$

所以我們要找的m就是小於60，且與60互質的數。

尤拉φ函數: $\varphi(n)$ =是小於或等於n的正整數中與互質的數的數目。

若$n=p_1{}^{k_1}p_2{}^{k_2}\ldots p_r{}^{k_r}$

則$\varphi(n)=n\prod_{p|n}(1-\frac{1}{p})$。

$\varphi(60)=\varphi(22\cdot 3\cdot 5)=(2-1)\cdot 2\cdot(3-1)\cdot(5-1)=16.$

所以，共有16種可能的L值

3. 類題

三名賽車選手在一個橢圓的賽車場上競速，他們從同一個起點出發且同方向，但不同速率，他們直到停下來前永遠維持等速率前進 。最慢的1圈/分鐘，最快的5圈/分鐘，第三人L圈/分鐘，$1 < L < 5$。這場競速會在三人再次交會時結束。

找出 L 可能的數量，使得在整場競速中總共發生69次超前（一位選手超越另一位選手，稱作超前，不包括開始與結束。

4. 圖論主題

在一有限圖上，每個點可被塗成黑色或白色，一開始全部都為黑色。我們可以選擇一點 P 而將 P 與其鄰居改變顏色。試問，我們可以在所有圖上做一系列上述的操作讓所有點都變成白色嗎？

5. 代數主題

$P(x)$, $Q(x)$ 為兩整數係數多項式，而 $a_n = n! + n$ 。試證，

若對於所有 n , $P(a_n)/Q(a_n)$ 皆為整數 ，

則對於所有 n 且 $Q(n) \neq 0$, $P(n)/Q(n)$ 皆為整數。

謝謝大家