

第八組

2010

數四甲
數四甲
數四乙
數四乙

410631122
410631128
410531226
410631207

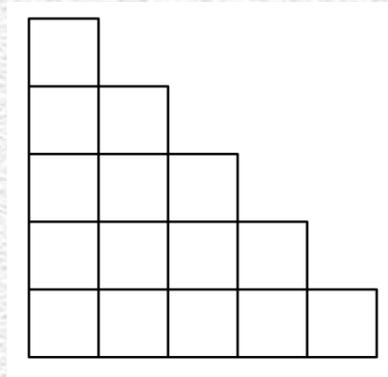
黃翊瑄
葉宗愿
王怡堯
唐仲暄





1. 組合主題

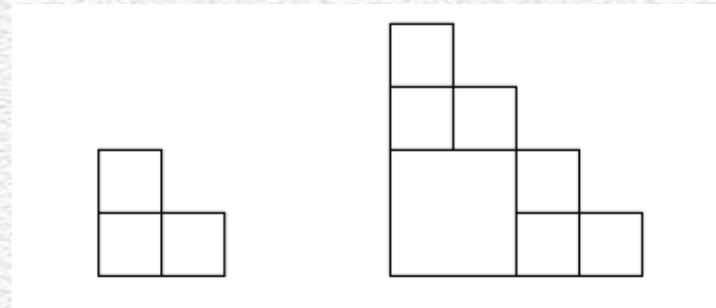
對於正整數 n ，「 n -階梯」是一個由單位方塊組成的圖，第一階有一個方塊，第二階有兩個，以此類推，第 n 階皆有 n 個方塊，且所有階的最左邊垂直對齊。例如，左圖為 5-階梯。



$f(n)$ 表示在 n -階梯上要用方形磁磚蓋滿所需要的磁磚數量的最少值。磁磚邊長可已是任意正整數。例如：

$$f(2)=3, f(4)=7。$$

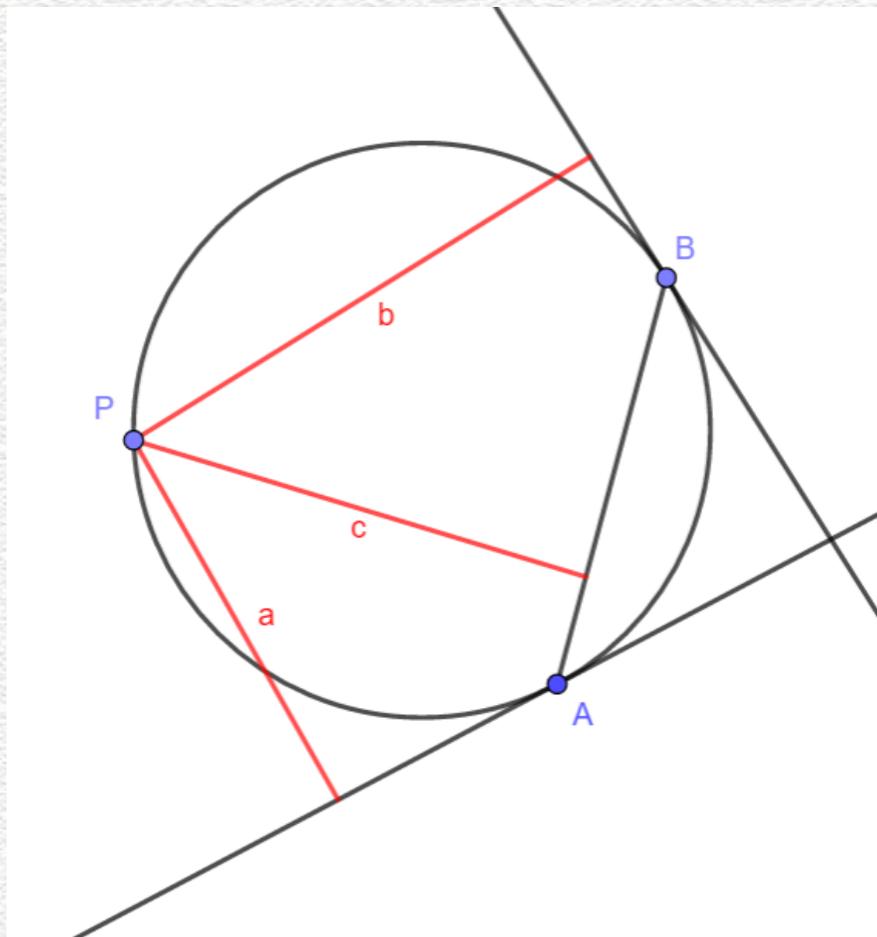
- (a) 找出所有 n ，滿足 $f(n)=n$ 。
- (b) 找出所有 n ，滿足 $f(n)=n+1$ 。





2. 幾何主題

A, B, P 為一圓上的三點，
 a, b 為 P 到 A, B 點切線的距離，
 c 為 P 到弦 AB 的距離，
試證 $c^2 = ab$ 。





3. 數論主題

三名選手在一個橢圓溜冰場上競速，他們從同一個起點出發且同方向，但不同速率，他們直到停下來前永遠維持等速率前進。最慢的1圈/分鐘，最快的 3.14 圈/分鐘，第三人

L 圈/分鐘， $1 < L < 3.14$ 。

這場競速會在三人再次交會時結束。找出 L 可能的數量，使得在整場競速中總共發生117次超前（一位選手超越另一位選手，稱作超前，不包括開始與結束。





3. 講解

首先，假設三位選手為 A, B, C （快到慢）

考慮 A, B 相對於 C 的位子， A, B 對於 C 來說都是跑整數圈（從 C 的角度）

我們假設 A 相對於 C 跑了 n 圈，假設 B 相對於 C 跑了 m 圈

考慮 A, B 相對於 C 的相對速度， $3.14 - 1 = 2.14$ 為 A 的相對速度， $L - 1$ 為 B 的相對速度

$$\text{他們所花的時間為 } \frac{n}{2.14} = \frac{m}{L-1} \Rightarrow L = 2.14 \left(\frac{m}{n} \right) + 1$$

我們可以發現我們要的 m, n 必互質，否則假設 $\gcd(m, n) = k$ ，則在 A 在走 $m/k, B$ 在走 n/k 時， A, B, C 已經交會一次了





3. 講 解

再來考慮超越的發生次數， A 相對於 B 跑了 $n-m$ 圈，而會發生 $n-m-1$ 次超越（ A 超越 B ）。

同理 A, B 分別會超越 C $n-1, m-1$ 次

$$117 = (n-1) + (m-1) + (n-m-1) = 2n-3 \Rightarrow n=60$$

所以我們要找的 m 就是小於60，且與60互質的數。

尤拉 φ 函數: $\varphi(n)$ = 是小於或等於 n 的正整數中與互質的數的數目。

$$\text{若 } n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$$

$$\text{則 } \varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)。$$

$$\varphi(60) = \varphi(2 \cdot 3 \cdot 5) = (2-1) \cdot 2 \cdot (3-1) \cdot (5-1) = 16。$$

所以，共有16種可能的 L 值





3. 類 題

三名賽車選手在一個橢圓的賽車場上競速，他們從同一個起點出發且同方向，但不同速率，他們直到停下來前永遠維持等速率前進。最慢的1圈/分鐘，最快的5圈/分鐘，第三人 L 圈/分鐘， $1 < L < 5$ 。這場競速會在三人再次交會時結束。

找出 L 可能的數量，使得在整場競速中總共發生69次超前（一位選手超越另一位選手，稱作超前，不包括開始與結束。





4. 圖論主題

在一有限圖上，每個點可被塗成黑色或白色，一開始全部都為黑色。我們可以選擇一點 P 而將 P 與其鄰居改變顏色。試問，我們可以在所有圖上做一系列上述的操作讓所有點都變成白色嗎？





5. 代數主題

$P(x), Q(x)$ 為兩整數係數多項式，而 $a_n = n! + n$ 。試證，
若對於所有 $n, P(a_n)/Q(a_n)$ 皆為整數，
則對於所有 n 且 $Q(n) \neq 0, P(n)/Q(n)$ 皆為整數。



The image features a central white rectangular area with a subtle, embossed floral pattern. This area is surrounded by various watercolor-style floral and leafy decorations. In the top-left corner, there are clusters of red berries and green leaves. In the top-right corner, a small pink gift box is decorated with pink flowers and greenery. In the bottom-left corner, there are pink roses and green leaves. In the bottom-right corner, there are more red berries and green leaves. The entire background is a light, textured grey with scattered white specks, giving it a soft, ethereal feel.

謝謝大家