數學解題方法
第9組

410631210 高浚洋
410631214 吳承遠
410831224 王皓正

第一題

- Consider 70-digit numbers n, with the property that each of the digits 1, 2, 3, . . . , 7 appears in the decimal expansion of n ten times (and 8, 9, and 0 do not appear). Show that no number of this form can divide another number of this form.

- 有一個70位的數字n，每個1,2,3,...,7位數都出現在n的十進制擴展10次(並且8,9,10都沒出現)，秀出此形式的任意數字不能除以其他的數字。

第二題

- Let ABCD be a cyclic quadrilateral whose opposite sides are not parallel, X the intersection of AB and CD, and Y the intersection of AD and BC. Let the angle bisector of ∠AXD intersect AD, BC at E, F respectively and let the angle bisector of ∠AYB intersect AB, CD at G, H respectively. Prove that EGF H is a parallelogram.

- 設ABCD為相對邊不平行的環狀四邊形，X為AB和CD的交點，Y為AD和BC的交點。讓∠AXD的角平分線分別在E，F處與AD，BC相交，∠AYB的角平分線與AB，CD分別在G，H相交。 證明EGFH是平行四邊形。

第三題

- Amy has divided a square up into finitely many white and red rectangles, each with sides parallel to the sides of the square. Within each white rectangle, she writes down its width divided by its height. Within each red rectangle, she writes down its height divided by its width. Finally, she calculates x, the sum of these numbers. If the total area of the white rectangles equals to the total area of the red rectangles, what is the smallest possible value of x?

- Amy將一個正方形分割成許多白色和紅色的長方形且是有限的，每一個長方形的邊都與正方形平行，在每一個白色長方形上寫下其寬度除以高度，紅色的寫下其高度除以寬度，最終他計算出總和x，假設白色長方形的面積總和等於紅色，x的最小值可能為多少？

第四題題目

- 試證有一正整數a之十進位連續字串能夠被2011整除
- 註:153204之之連續字串可以有15，532，0。注意0是可以被2011除盡的
- 延伸:把2011改2021

第四題答案

假設a有2012個位數且每個位數分別是a0,a2......a2011。則假設有一數bi之位數符合以下描述b=ai,ai-1......a0。根據鴿籠原理我們可知必定有bk與bj在2011之下同餘也就是說以下描述在k>j>=0必定符合bk-bj=c×10^k-j已知2011與10互質所以c一定能被2011除盡。得證。

延伸:2021因為也跟10互質可以得出與2011一樣的解法

第五題

(5) Let d be a positive integer. Show that for every integer S, there exists an integer $n > 0$ and a sequence $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$, where for any k, $\epsilon_k = 1$ or $\epsilon_k = -1$, such that

$$S = \epsilon_1(1+d)^2 + \epsilon_2(1+2d)^2 + \epsilon_3(1+3d)^2 + \cdots + \epsilon_n(1+nd)^2.$$

- 有一個自然數d。證明對於所有正整數S，皆存在一個n>0和一個數列Ɛ1、Ɛ2、Ɛ3……，而且該數列中的任何一項皆為
- 1或-1，則我們可以得到如下的等式

$$S = \epsilon_1(1+d)^2 + \epsilon_2(1+2d)^2 + \epsilon_3(1+3d)^2 + \cdots + \epsilon_n(1+nd)^2.$$

第五題解法

$$S=\epsilon_1(1+d)^2+\epsilon_2(1+2d)^2+\epsilon_3(1+3d)^2+\cdots+\epsilon_n(1+nd)^2.$$

- 由該等式可以發現，該級數都是由{1或-1}以及(1+kd)^2組成
- 所以我們大膽的假設U_k=(1+kd)^2，
- 並接著計算U_{k+3}-U_{k+2}+U_{k+1}-U_k=4d^2，反之-U_{k+3}+U_{k+2}-U_{k+1}+U_k=-4d^2。
- 取四個一組是因為每四個一組生成的正負4d^2恰好為一個常數。

- 假設我們找到一個S_0使的它滿足如上頁的條件，也就是說
- 對於所有正整數q滿足：S_0+ (4d^2)q
- 那麼我們就可以說對於所有S，都存在一個
- S'使得 S' ≡ S (mod 4d^2)
- 而且在N極大的時候，S'可以被拆解成
- (1 + d)^2 + (1 + 2d)^2 + · · · + (1 + N d)^2
- 我們可以自己決定N來使的整個級數為奇數或偶數

- 現在我們把$(1+kd)^2$前的係數改為-1
- 會使的級數的合減少為$2(1+kd)^2$
- 而當$k \equiv 0 \pmod{2d}$，其合為 2 (modulo $4d^2$)

- 因此我們可以知道當N極大，可以發現很多的$k<N$並且k是2d的
- 倍數。
- 我們再藉由這點，將$4d^2$替換成它的同餘類2r

- 接著，我們選著一個N使的該級數為奇數並找出一個適合的r，
- 且r < 2d^2 我們可以得到與所有奇數同餘4d^2
- 我們選著一個N使的該級數為偶數並找出一個適合的r，
- 且r < 2d^2 我們也可以得到與所有奇數同餘4d^2

- 故得證