# 第二組 CMO2013

410631105 王嘉顥
410631106 王士齊
410631116 劉家宇
410631125 李宥德
410631127 張茗洋

1.代數

Determine all polynomials $P(x)$ with real coefficients such that

$$(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)$$

is a constant polynomial.

定義實係數多項式$P(x)$使得

$$(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)\text{為常數多項式}$$

類似題：

定義實係數多項式$P(x)$使得

$$(x+100)P(x-1)-(x-999)P(x)$$

為常數多項式

2.數論

有一數列 $a_1, a_2,\ldots., a_n$ 由 $1,2,\ldots,n$ 按順序組成。

試問是否存在正整數 $n$，可以讓

$0, a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \ldots\ldots, a_1+a_2+\cdots+a_n$

這 $n+1$ 個數除以 $n+1$ 都有不同的餘數？

3.幾何

令G為直角三角形ABC的重心，且 $\angle BCA = 90°$ ，

令P是 $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ 上的一點，使得$\angle CPA = \angle CAB$，令Q是$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ 上的一點， 使得$\angle CQB = \angle ABC$，證明三角形$AQG$的外接圓和三角形$BPG$相交於AB邊上的一點

4.代數

Let $n$ be a positive integer.

For any positive integer j and positive real number $r$, define $f_j(r)$and $g_j(r)$ by

$f_j(r)$=min($jr, n$)+min($\frac{j}{r}, n$)

$g_j(r)$=min(⌈jr⌉,$n$)+min($\left\lceil\frac{j}{r}\right\rceil, n$)

where $\lceil x \rceil$ denotes the smallest integer greater than or equal to $x$.

Prove $\sum_{j=1}^{n} f_j(r) \leq n^2$+$n \leq \sum_{j=1}^{n} g_j(r)$

for all positive real numbers $r$.

4.

令$n$為一個正整數，

對正整數$j$，正實數$r$，定義函數$f_j(r)$、$g_j(r)$

$f_j(r)$=min($jr, n$)+min($\frac{j}{r}, n$)

$g_j(r)$=min(⌈jr⌉,$n$)+min($\left\lceil\frac{j}{r}\right\rceil, n$)

⌈$x$⌉為所有大於等於$x$的整數的最小值

證$\sum_{j=1}^{n} f_j(r) \leq n^2$+$n \leq \sum_{j=1}^{n} g_j(r)$

5.幾何

令$O$點為銳角三角形$ABC$的外心。

一個圓$\Gamma$經過頂點A且分別交$\overline{AB}$及$\overline{AC}$於$P$、$Q$兩點

並使得$\angle BOP = \angle ABC$、$\angle COQ = \angle ACB$。

請證明$\overline{BC}$鏡射於$\overline{PQ}$之線段為$\Gamma$之切線。

令三角形 $OBP$ 的外接圓與 $\overline{BC}$ 相交於點 $R$ 和點 $B$，且令$\angle A, \angle B, \angle C$分別代表 $A, B, C$ 三頂點的角度。因為$\angle BOP = \angle B$ 且 $\angle COQ = \angle C$，可得：

$$\angle POQ = 360° - \angle BOP - \angle COQ - \angle BOC = 360° - (180° - \angle A) - 2\angle A = 180° - \angle A$$

這意味著 $APOQ$ 是一個圓內接四邊形。因為 $BPOR$ 是圓內接四邊形，所以：

$$\angle QOR = 360° - \angle POQ - \angle POR = 360° - (180° - \angle A) - (180° - \angle B) = 180° - \angle C$$

這意味著 $CQOR$ 是一個圓內接四邊形。

因為 $APOQ$ 和 $BPOR$ 都是圓內接四邊形，所以：

$$\angle QPR = \angle QPO + \angle OPR = \angle OAQ + \angle OBR = (90° - \angle B) + (90° - \angle A) = \angle C$$

因為 $CQOR$ 是圓內接四邊形，所以$\angle QRC = \angle COQ = \angle C = \angle QPR$(圓周角=弦切角)，

也就意味著三角形 $PQR$ 的外接圓與$\overline{BC}$相切。

此外，因為$\angle PRB = \angle BOP = \angle B$，

$$\angle PRQ = 180° - \angle PRB - \angle QRC = 180° - \angle B - \angle C = \angle A = \angle PAQ$$

意味著 $PQR$ 的外接圓是 $\Gamma$ 過 $\overline{PQ}$ 鏡射。

由 $\overline{PQ}$ 的對稱性，意味著 $\overline{BC}$ 透過 $\overline{PQ}$ 鏡射後是$\Gamma$的切線