第3組報告

朱鈺暉

翁昌平

葉哲均

林孟勳

周郁儒

第1題代數主題

$a_1, a_2, \ldots, a_n$為相乘為1的正實數，請證明
$(a_1/1+a_1)+[a_2/(1+a_1)(1+a_2)]+[a_3/(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)]+\ldots+[a_n/(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)]$的總和大於或是等於$(2^n-1)/2^n$

第二題組合組題

有個矩形是由m乘n個小正方形組成，m與n都是正奇數，m是列數、n是行數，每個小正方形要隨意塗成藍色或紅色，如果這列的紅色正方形多於藍色就稱為以紅色為主，如果這行的藍色正方形多於紅色就稱為以藍色為主，假如m列裡面是紅色為主的列有k列，假如行裡面是藍色為主的行有b行

請用m與n去討論k+b之最大值

解法

因為m、n都是奇數所以一定有個顏色會多於另外一個，假設紅色多於藍色，不可能所有的行都以藍色為主，因為這樣藍色就會多於紅色，藍色多於紅色的話同理表示不可能所有的列都是以紅色為主，這表示答案不可能是m+n

Case.1 m與n其中一個是1

答案是 max{m，n}

如果是1x1那只可能是1或是1

mx1的話答案不可能是m+1，如果全塗成紅色的話答案就是m

1xn的話答案不可能是n+1，如果全塗成藍色的話答案就是n

Case.2 m、n都大於或等於3

答案是 m+n-2

我們知道答案不是m+n，那可能是m+n-1嗎?

假設m=2a-1 、n=2c-1

a、c都是大於等於2的整數

如果所有列都是紅色為主那每列至少要有c個紅色方塊，總共至少會有(2a-1)c個紅色方塊

如果有只有其中一行不以藍色為主，那總共有2c-2行以藍色為主，至少會有(2c-2)a個藍色方塊

$(2a - 1)c + a(2c - 2) = 4ac - c - 2a$

$(2a - 1)(2c - 1) = 4ac - 2a - 2c + 1$

$4ac - 2a - 2c + 1 < 4ab - 2a - c$

所以答案不可能是m+n-1

可能是m+n-2嗎

我們把最左邊那一行塗成紅色，再把第一列剩下的
格子全塗成藍色，剩下的會是一個偶x偶的矩形，
只要把剩下格子第一行紅藍或藍紅依次塗滿每一列，
那這一整個會是一個以列以m-1列紅為主以及行以
n-1行藍為主的圖形。

答案也就是m+n-2

相似題

有個矩形是由m乘n個小正方形組成，m與n都是正偶數，m是列數、n是行數，每個小正方形要隨意塗成藍色或紅色，如果這列的紅色正方形多於藍色就稱為以紅色為主，如果這行的藍色正方形多於紅色就稱為以藍色為主，假如m列裡面是紅色為主的列有k列，假如行裡面是藍色為主的行有b行

請用m與n去討論k+b之最小值

第3題數論主題

令p為固定的奇數，整數的p元組（a1，a2，a3，...，ap）被稱為好，如果

(i) $0 \le ai \le p - 1$ 對於所有的I

(ii) $a1 + a2 + a3 + \cdot\cdot\cdot\cdot + ap$ 不能被P整除

(iii) $a1a2 + a2a3 + a3a4 + \cdot\cdot\cdot\cdot + apa1$

找出好的p元組的數量

第4題幾何主題

四邊形ABCD刻在一個圓圈上，點P位於四邊形ABCD內部，且 ∠P AB = ∠PBC = ∠PCD = ∠PDA，直線 AD 和直線 BC 焦於Q點，直線 AB 和直線 CD 焦於R點，證明線PQ和PR所形成的角度會與四邊形ABCD的對角線所形成的角度是一樣的

第5題數論主題

固定正整數n和k ≥ 2。黑板上寫了一組連續的n個正整數。你可以挑選這些正整數連續的區塊的部分，然後我會把這全部的數字加上1或減掉1。你可以隨興地去重複這樣的步驟，並且盡可能地根據我做的動作去調整你的選擇。請證明經過有限次數的步驟之後，你可以讓黑板上這些數字裡有至少n − k + 2個數字能同時被k給整除。