第七組
2018數學競賽題目

410631118傅子銓 410831134鄭朧玥 410831111莊峻評
410731217周　捷 410631212程鉉喨

第一題

考慮代幣在平面上的排列，而不是在清楚的點上。我們被允許採用以下幾種動作：

在A和B處選擇一對代幣並將它們都移到A和B的中點。 我們認為n個代幣的排列是可縮減的，假如在有限數量的移動中，有可能在同一點上獲得所有的代幣。

證明在n個代幣的排列中皆是可縮減的，若且唯若，n為2的次方。

第二題

讓圓上的五個點按順時針順序標記為A，B，C，D，E。

假設$\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{DE}}$且$P$為$\overline{\mathrm{AC}}$與$\overline{\mathrm{BD}}$的交點。

設Q為通過A和B線上的點，使得A在B和Q之間，且$\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{DP}}$。

同樣地，設R為通過C和D線上的點，使得D在C和R之間且$\overline{\mathrm{DR}} = \overline{\mathrm{AP}}$。

證明$\overline{\mathrm{RE}}$垂直於$\overline{\mathrm{QR}}$

第三題(數論)

- 若兩正整數a與b滿足$a = pb \text{ or } b = pa$ ，p是質數，則稱a與b為質相關(prime-related)。找出所有可能的正整數n，使得n不僅至少有三個因數以上，且n的所有因數可排成一個圓圈，當中相鄰任兩數為質相關。

- 舉例:6

1	3
2	6

6是其中一個

- 9不是:

<table>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">9</td></tr>
</table>

$1 \times 9 = 9$ ， 9不是質數

(提示)

- 1.一定不是1也不是質數
- 2.若n作質因數分解成p^k(其中p是質數，k為正整數)也一定不是
  (因為1旁邊只能放p)

若6可以 36可不可以?

（解答）將n作質因數分解成 $p_1{}^a \times p_2{}^b$

$p_1{}^0p_2{}^0$	$p_1{}^1p_2{}^0$	$p_1{}^2p_2{}^0$	…	$p_1{}^ap_2{}^0$
$p_1{}^0p_2{}^1$	$p_1{}^1p_2{}^1$	$p_1{}^2p_2{}^1$	…	$p_1{}^ap_2{}^1$
⋮	⋮	⋮	…	⋮
$p_1{}^0p_2{}^b$	$p_1{}^1p_2{}^b$	$p_1{}^2p_2{}^b$	…	$p_1{}^ap_2{}^b$

若$a = 2$，$b = 1$

$p_1{}^0p_2{}^0$	$p_1{}^1p_2{}^0$	$p_1{}^2p_2{}^0$
$p_1{}^0p_2{}^1$	$p_1{}^1p_2{}^1$	$p_1{}^2p_2{}^1$

若$a = 3$，$b = 5$

$p_1{}^0p_2{}^0$	$p_1{}^1p_2{}^0$	$p_1{}^2p_2{}^0$	$p_1{}^3p_2{}^0$
$p_1{}^0p_2{}^1$	$p_1{}^1p_2{}^1$	$p_1{}^2p_2{}^1$	$p_1{}^3p_2{}^1$
$p_1{}^0p_2{}^2$	$p_1{}^1p_2{}^2$	$p_1{}^2p_2{}^2$	$p_1{}^3p_2{}^2$
$p_1{}^0p_2{}^3$	$p_1{}^1p_2{}^3$	$p_1{}^2p_2{}^3$	$p_1{}^3p_2{}^3$
$p_1{}^0p_2{}^4$	$p_1{}^1p_2{}^4$	$p_1{}^2p_2{}^4$	$p_1{}^3p_2{}^4$
$p_1{}^0p_2{}^5$	$p_1{}^1p_2{}^5$	$p_1{}^2p_2{}^5$	$p_1{}^3p_2{}^5$

若$a = 2$，$b = 2$

$p_1{}^0p_2{}^0$	$p_1{}^1p_2{}^0$	$p_1{}^2p_2{}^0$
$p_1{}^0p_2{}^1$	$p_1{}^1p_2{}^1$	$p_1{}^2p_2{}^1$
$p_1{}^0p_2{}^2$	$p_1{}^1p_2{}^2$	$p_1{}^2p_2{}^2$

（解答）$n = {p_1}^a \times {p_2}^b$，$a$與b可能都偶數?

以$a = 2$，$b = 2$為例:

若a 、 b皆為偶數，則表格長與寬皆為奇數

不可能任意相鄰兩因數為質關係繞完一圈

${p_1}^0{p_2}^0$	${p_1}^1{p_2}^0$	${p_1}^2{p_2}^0$
${p_1}^0{p_2}^1$	${p_1}^1{p_2}^1$	${p_1}^2{p_2}^1$
${p_1}^0{p_2}^2$	${p_1}^1{p_2}^2$	${p_1}^2{p_2}^2$

因此，a與b至少1數為奇數 $\rightarrow$ 即n不為完全平方數

（解答）那$n = {p_1}^a \times {p_2}^b \times \cdots \times {p_r}^k$ 呢?

${p_1}^0{p_2}^0$	${p_1}^1{p_2}^0$
${p_1}^0{p_2}^1$	${p_1}^1{p_2}^1$
${p_1}^0{p_2}^2$	${p_1}^1{p_2}^2$
${p_1}^0{p_2}^3$	${p_1}^1{p_2}^3$

同樣道理，子數(a、b、…、k)不可能皆是偶數

假設 $\mathrm{n} = {p_1}^1 \times {p_2}^b \times {p_3}^c$

把 ${p_1}^0{p_2}^0$、${p_1}^1{p_2}^0$…到 ${p_1}^1{p_2}^3$ 重新排成一列

c不論為奇數還是偶數，還是能找到適當的方法排成能滿足相鄰兩數為質關係的圓圈

${p_1}^0{p_2}^0{p_3}^0$	${p_1}^1{p_2}^0{p_3}^0$	${p_1}^1{p_2}^1{p_3}^0$	${p_1}^1{p_2}^2{p_3}^0$	${p_1}^1{p_2}^3{p_3}^0$	${p_1}^0{p_2}^3{p_3}^0$	${p_1}^0{p_2}^2{p_3}^0$	${p_1}^0{p_2}^1{p_3}^0$
${p_1}^0{p_2}^0{p_3}^1$	${p_1}^1{p_2}^0{p_3}^1$	${p_1}^1{p_2}^1{p_3}^1$	${p_1}^1{p_2}^2{p_3}^1$	${p_1}^1{p_2}^3{p_3}^1$	${p_1}^0{p_2}^3{p_3}^1$	${p_1}^0{p_2}^2{p_3}^1$	${p_1}^0{p_2}^1{p_3}^1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
${p_1}^0{p_2}^0{p_3}^c$	${p_1}^1{p_2}^0{p_3}^c$	${p_1}^1{p_2}^1{p_3}^c$	${p_1}^1{p_2}^2{p_3}^c$	${p_1}^1{p_2}^3{p_3}^c$	${p_1}^0{p_2}^3{p_3}^c$	${p_1}^0{p_2}^2{p_3}^c$	${p_1}^0{p_2}^1{p_3}^c$

(解答)結論

- 若$n = {p_1}^a \times {p_2}^b \times \cdots \times {p_r}^k$ ，其中子數至少1數為奇數，皆能有辦法適當排成一圓圈讓相鄰兩數皆為質關係

- 只要n不為1、質數、完全平方數及 p^k皆是

延伸題:

- 找出大於2021的最小前五個能滿足因數圍成一圈使得相鄰兩數為質關係的數

Ans:

(1) $2022 = 2 \times 3 \times 337$

(2) $2023 = 7 \times 17^2$

(3) $2024 = 2 \times 2^6$

$2025 = 3^4 \times 5^2$（完全平方，不是）

(4) $2026 = 2 \times 1013$

$2027 = 1 \times 2027$(質數，不是)

(5) $2028 = 2^2 \times 3 \times 13^2$

第四題(代數)

找出所有實係數多項式p(x)並滿足以下性質：

存在一個實係數多項式q(x)使得

$p(1)+p(2)+p(3)+\cdots+p(n)=p(n)q(n)$，對所有正整數n

第五題

令k為一個正整數且為偶數，首先Sarah挑選一個比1大的正整數N，接著以下面的條件進行改變:

每一分鐘，選擇一個當下N值的質因數p，然後用當下的N值去乘上 $p^k - p^{-1}$，製造出一個新的N。

證明:有無限多個正偶數的k值，使得無論Sarah怎麼選擇，得出的N值在某些值永遠會被2018除盡。