

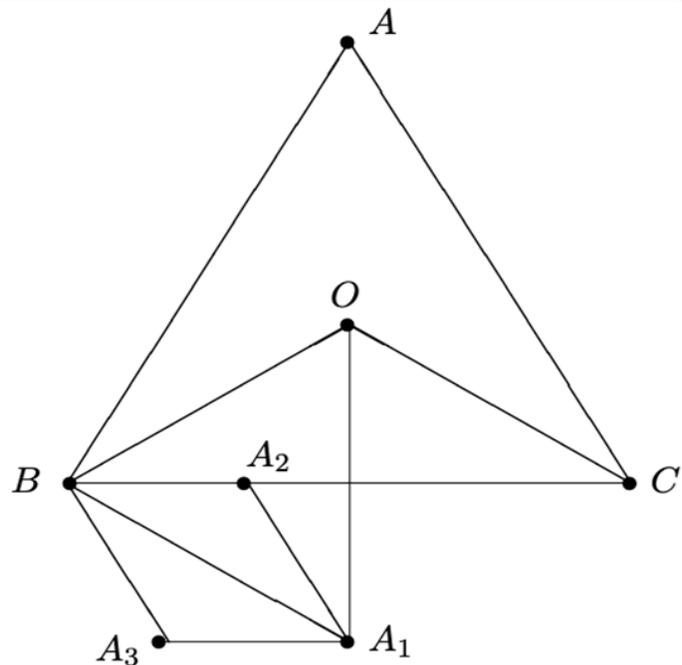
第八組

2019

數四甲	410631122	黃翊瑄
數四甲	410631128	葉宗愿
數四乙	410531226	王怡堯
數四乙	410631207	唐仲暄

01

幾何題型



Amy 在一平面上畫三個點 A, B, C 。

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 6。$$

Amy 將可以在平面上任三個點的外心上再畫上一個點。

例如下圖：

O 為 $\triangle ABC$ 的外心， A_1 為 $\triangle BCO$ 的外心， A_2 為 $\triangle A_1BO$ 的外心等

(a) 試證，最終 *Amy* 可以畫出一個與先前的一點距離大於 7

(b) 試證，最終 *Amy* 可以畫出一個與先前的一點距離大於 2019

02

代數題型

a, b 為正整數使得 $a + b^3$ 可以被 $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$ 整除。
試證， $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$ 可以被所有大於 1 的數的立方整除。

02

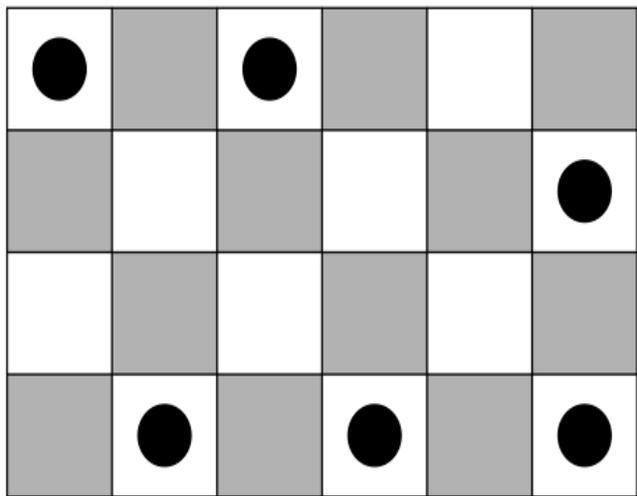
代數題型(類題)

a, b 為正整數使得 $a + b^4$ 可以被 $a^3 - 4a^2b + 6ab - 4b^3 - 1$ 整除。

試證， $a^3 - 4a^2b + 6ab - 4b^3 - 1$ 可以被所有大於 1 的數的四次方整除。

03

組合題型



m, n 為正整數。

一個 $2m \times 2n$ 的棋盤被塗成白色跟灰色。

將 mn 個棋子擺在白色格子上，且不能對角相鄰。

找出所有擺放方式的個數。

左圖為 $m=2$ and $n=3$ 的範例：



04

代數題型

n 為一個大於 1 的整數，一數列 a_0, a_1, \dots, a_n 為實數且 $a_1 = a_{n-1} = 0$ 。

試證，對於所有正整數 k ， $|a_0| - |a_n| \leq \sum_{i=0}^{n-2} |a_i - ka_{i+1} - a_{i+2}|$ 。

05

數論題型

David 和 *Jacob* 再玩一遊戲，在一平面上有 n 個點 ($n \geq 3$)，任三點不共線。玩家可以在此平面上選擇兩點，畫上他們的線段。當一玩家畫出一個環包含奇數個線段組成的 (*odd cycle*)，則輸掉遊戲。假設 *David* 先，找出所有 n 使得他有必勝策略。

謝謝大家