經濟數學

411031216 許仲勛　411031122 陳威宏
411031125 陳宣睿　411031129 邱仲華
411031137 游智宇　411031139 張天傑

資料、圖片來源:

portfolio.pdf

前言

表一：　應用在投資學上的數學與統計方法

投資學的課題	數學及統計方法
投資組合的選擇	百分數；等比級數；預期值；方差；協方差；偏度；峰度；概率；正態及非正態分佈；正態分佈檢驗；矩陣代數；最優化方法
資產定價模型	回歸分析；因子分析
市場效率性	隨機走動；連檢定法；自相關係數；時間序列模型
技術分析	控制圖；*共整合*
市場波幅	ARCH，GARCH 模型
期權定價	布朗運動；隨機積分

章節

- 1.投資組合
- 2.市場效率

投資組合

- 什麼是投資?
- 1.現在投入，將來收回
- 2.風險性

資產回報率

設

- P_t 為在時間 t 時資產的價格
- D_t 為資產在時段（$t-1, t$）內所派發的利息
- R_t 為資產在時段（$t-1, t$）的回報率：

則 $$R_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

例題

表二

月份	價格	股息	回報率
2005 年 09 月	$10.7	-	-
2005 年 10 月	$11.0	-	0.028
2005 年 11 月	$11.1	$0.50	0.054 5
2005 年 12 月	$10.7	-	–0.036

平均回報率

如果每個月分的回報率不同，我們通常會使用算術平均數(A.M)或幾何平均數(G.M)去計算平均回報率

- 算術平均數：

$$1+\text{A.M.}=\frac{[(1+R_1)+(1+R_2)+\cdots+(1+R_T)]}{T}$$ 或

$$\text{A.M.}=\frac{(R_1+R_2+\cdots+R_T)}{T}$$

- 幾何平均數：

$$1+\text{G.M.}=[(1+R_1)(1+R_2)\ldots(1+R_T)]^{1/T}$$ 或

$$\text{G.M.}=[(1+R_1)(1+R_2)\ldots(1+R_T)]^{1/T}-1$$

例題

表三

月份	回報率
9 月	0.2000
10 月	–0.0833
11 月	–0.0909

根據以上表三內九月至十一月的回報率，我們可以用算術平均數得出這三個月的平均回報率是

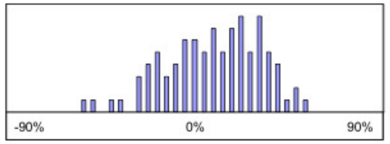
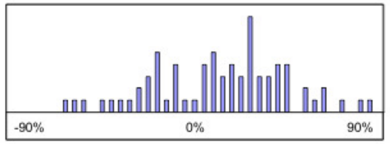
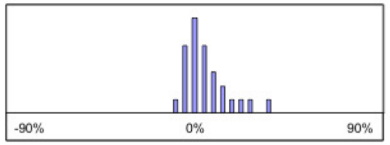
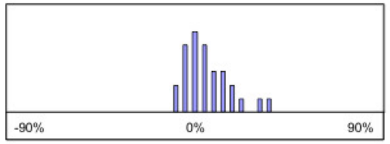
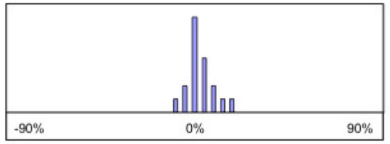
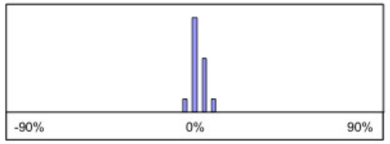
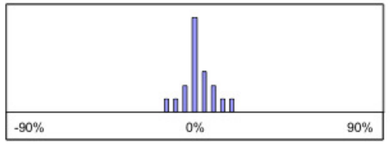
$$\frac{[0.2+(-0.0833)+(-0.0909)]}{3}\times 100\% = 0.86\%，$$

而用幾何平均數計算出的平均回報率則是

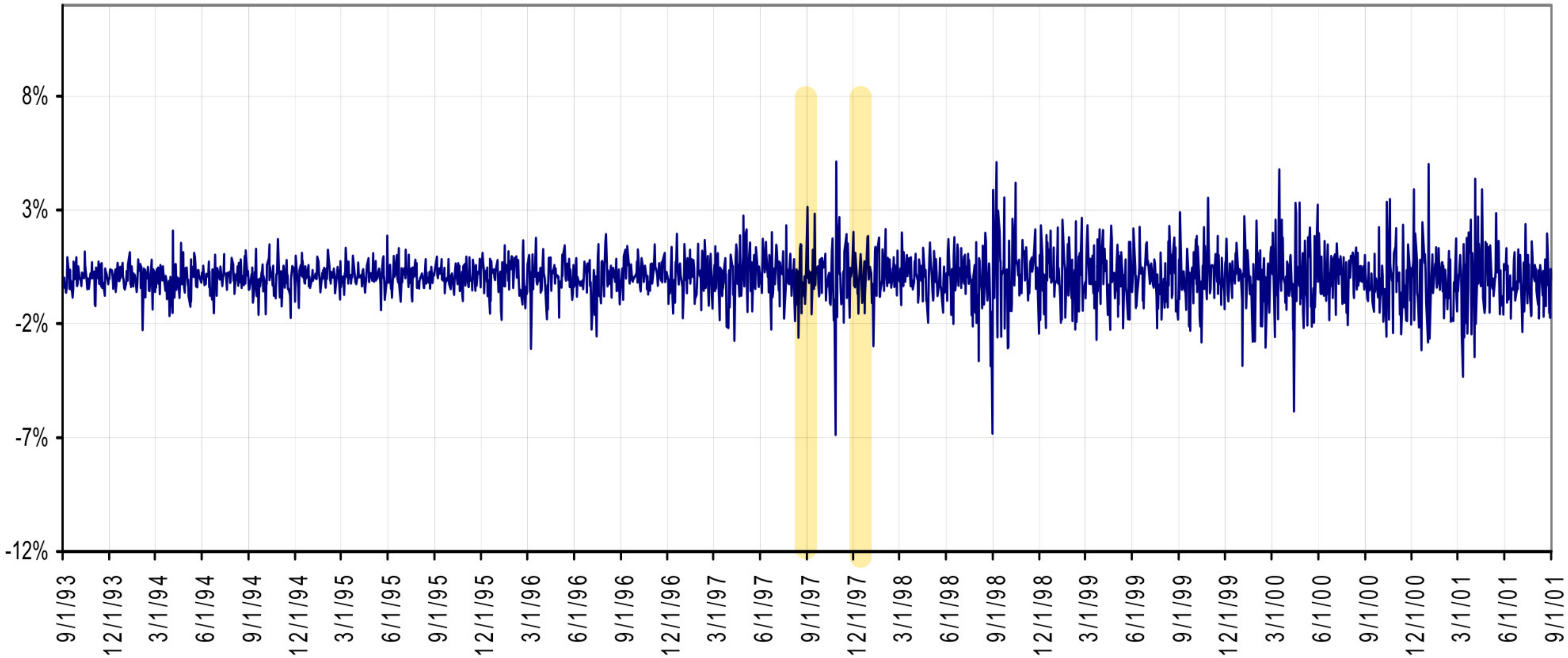
$$\{[(1+0.2)(1-0.0833)(1-0.0909)]^{1/3}-1\}\times 100\% = 0.0\%。$$

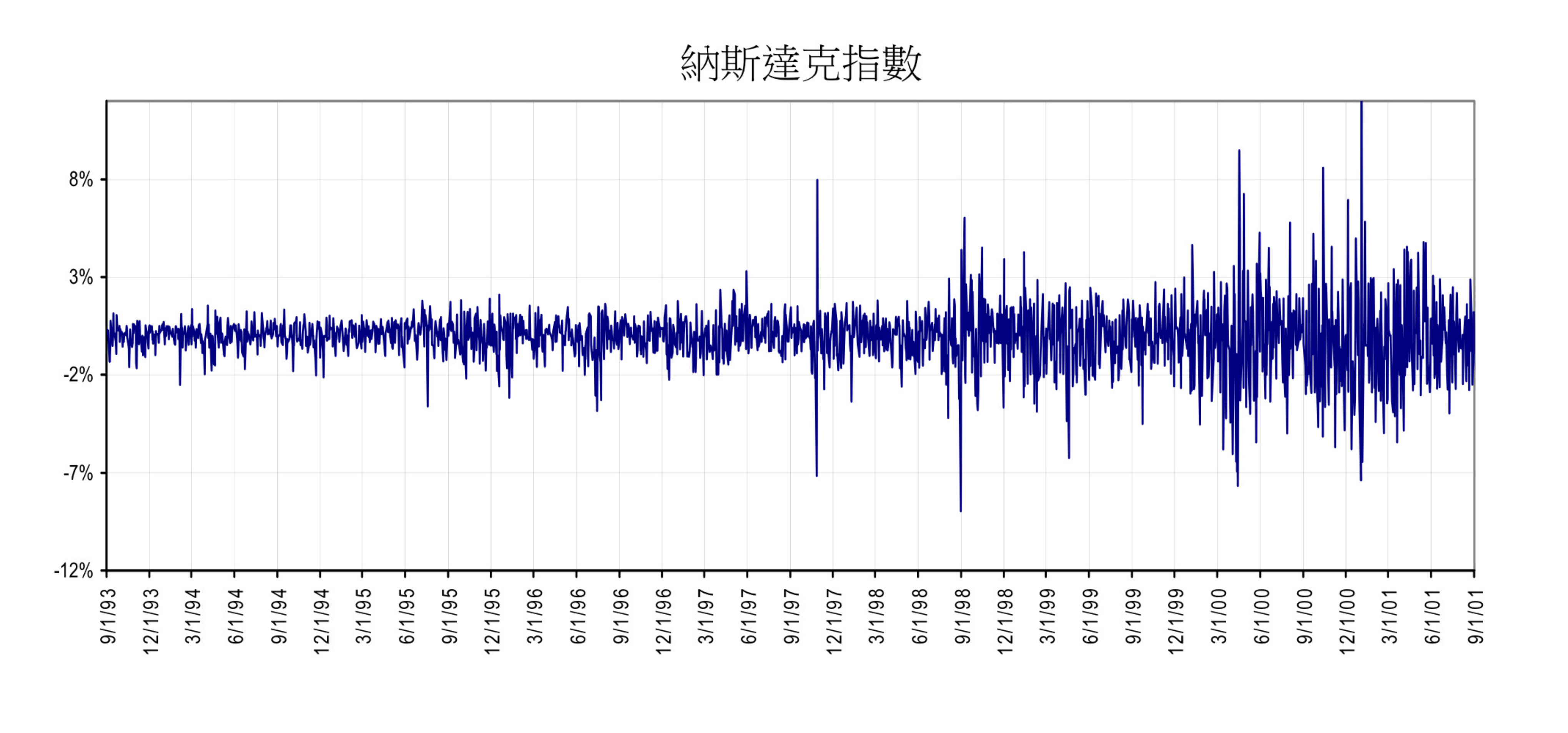
的分佈。

表四： 美國資產的平均年回報率及標準差 (1926-1999)

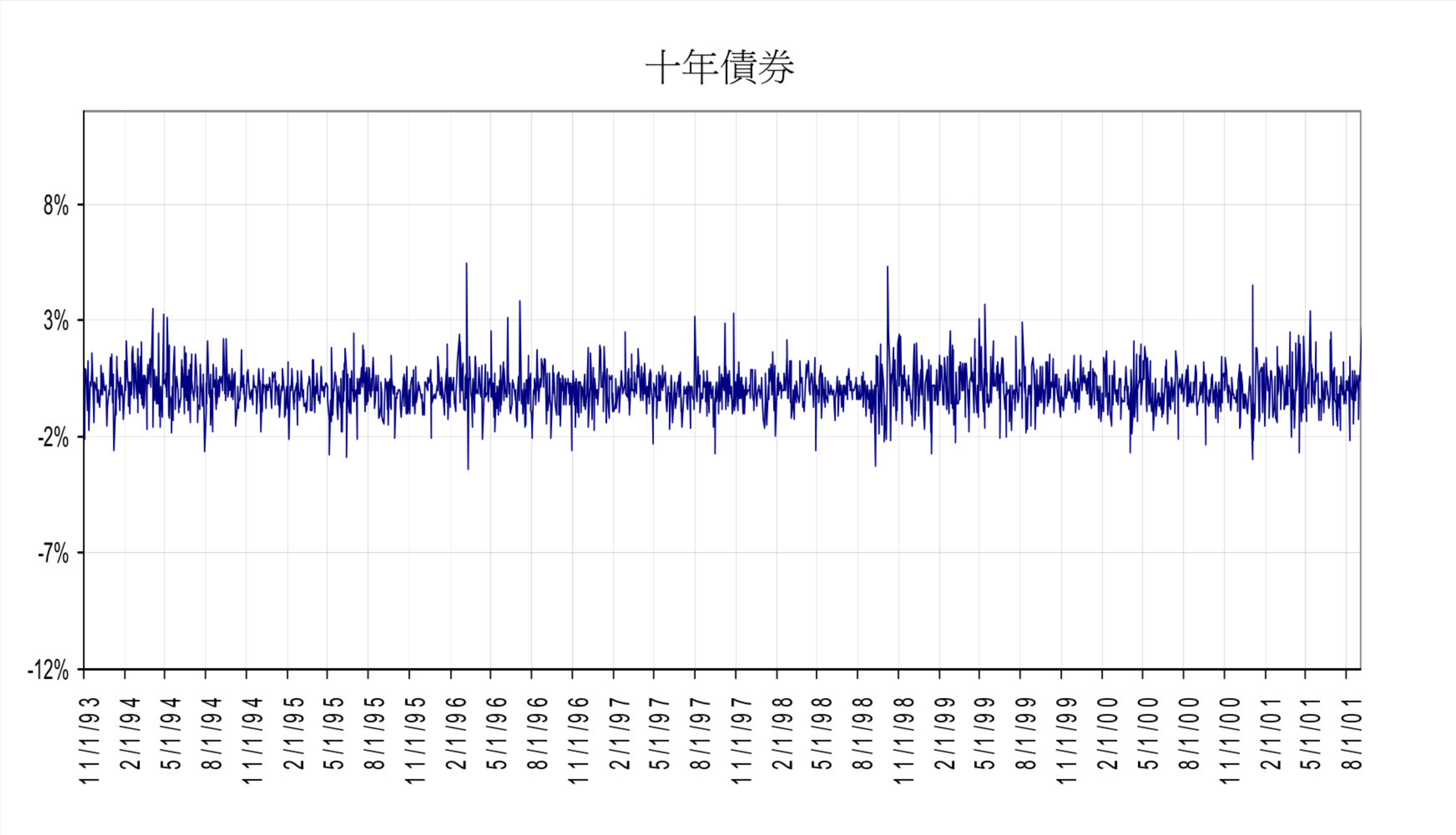
投資產品	幾何平均數 (G.M.)	算術平均數 (A.M.)	標準差	分析
大型公司的股票	11.3%	13.3%	20.1%	
小型公司的股票	12.6%	17.6%	3.6%	
長期公司債券	5.6%	5.9%	8.7%	
長期政府債券	5.1%	5.5%	9.3%	
中期政府債券	5.2%	5.4%	5.8%	
短期政府票據	3.8%	3.8%	3.2%	
通脹	3.1%	3.2%	4.5%	

標準普爾 500 指數


8%
3%
-2%
-7%
-12%
9/1/93
12/1/93
3/1/94
6/1/94
9/1/94
12/1/94
3/1/95
6/1/95
9/1/95
12/1/95
3/1/96
6/1/96
9/1/96
12/1/96
3/1/97
6/1/97
9/1/97
12/1/97
3/1/98
6/1/98
9/1/98
12/1/98
3/1/99
6/1/99
9/1/99
12/1/99
3/1/00
6/1/00
9/1/00
12/1/00
3/1/01
6/1/01
9/1/01



納斯達克指數
8%
3%
-2%
-7%
-12%
9/1/93
12/1/93
3/1/94
6/1/94
9/1/94
12/1/94
3/1/95
6/1/95
9/1/95
12/1/95
3/1/96
6/1/96
9/1/96
12/1/96
3/1/97
6/1/97
9/1/97
12/1/97
3/1/98
6/1/98
9/1/98
12/1/98
3/1/99
6/1/99
9/1/99
12/1/99
3/1/00
6/1/00
9/1/00
12/1/00
3/1/01
6/1/01
9/1/01


十年債券
8%
3%
-2%
-7%
-12%
11/1/93
2/1/94
5/1/94
8/1/94
11/1/94
2/1/95
5/1/95
8/1/95
11/1/95
2/1/96
5/1/96
8/1/96
11/1/96
2/1/97
5/1/97
8/1/97
11/1/97
2/1/98
5/1/98
8/1/98
11/1/98
2/1/99
5/1/99
8/1/99
11/1/99
2/1/00
5/1/00
8/1/00
11/1/00
2/1/01
5/1/01
8/1/01

- 資產在一時段中的回報率，R
- 預期回報率，$\mu = E(R)$
- 方差，$\sigma^2 = \mathrm{Var}(R) = E(R - \mu)^2$
- 標準差，$\sigma = [\mathrm{Var}(R)]^{1/2}$

例三　資產的預期回報率及風險的計算

表五

市場狀況	概率	產品 A 的回報率	產品 B 的回報率
好	0.3	11%	16%
普通	0.5	9%	12%
差	0.2	8%	– 8%

假設市場只會出現三種可能性(好、普通和差)，而這三種狀況出現的概率是不一樣的。產品 A 和產品 B 的回報率會隨著不同的市場情況而變動，因此我們很難單憑肉眼去分析哪種產品較好。從表五中，我們得知有八成機會 B 的回報都會比 A 好，這是否代表我們投資時應選 B 而不選 A 呢?

讓我們來計算兩種產品的預期回報：

1. $E(R_A) = 0.3(11\%) + 0.5(9\%) + 0.2(8\%) = 9.4\%$

2. $E(R_B) = 0.3(16\%) + 0.5(12\%) + 0.2(-8\%) = 9.2\%$

讓我們來計算兩種產品的風險：

1. $\sigma_A^2 = [0.3 \times (11\% - 9.4\%)^2 + 0.5 \times (9\% - 9.4\%)^2 + 0.2 \times (8\% - 9.4\%)^2] = 0.000\,124$

   A 的風險值：　$\sigma_A = (0.000124)^{1/2} = 1.11\%$

2. $\sigma_B^2 = [0.3 \times (16\% - 9.2\%)^2 + 0.5 \times (12\% - 9.2\%)^2 + 0.2 \times (-8\% - 9.2\%)^2] = 0.007\,696$

   B 的風險值：　$\sigma_B = (0.007696)^{1/2} = 8.77\%$

假設 $R_1,\ R_2,\ldots,\ R_T$ 代表過去某資產每月／每周／每日的歷史回報率，我們可以用樣本平均值來估計預期回報率：

$$\overline{R} = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_T}{T}$$

我們亦可以用樣本標準差來估計風險：

$$s = \sqrt{\frac{(R_1 - \overline{R})^2 + (R_2 - \overline{R})^2 + \cdots + (R_T - \overline{R})^2}{T - 1}}$$

例四　兩項投資的比較

表六

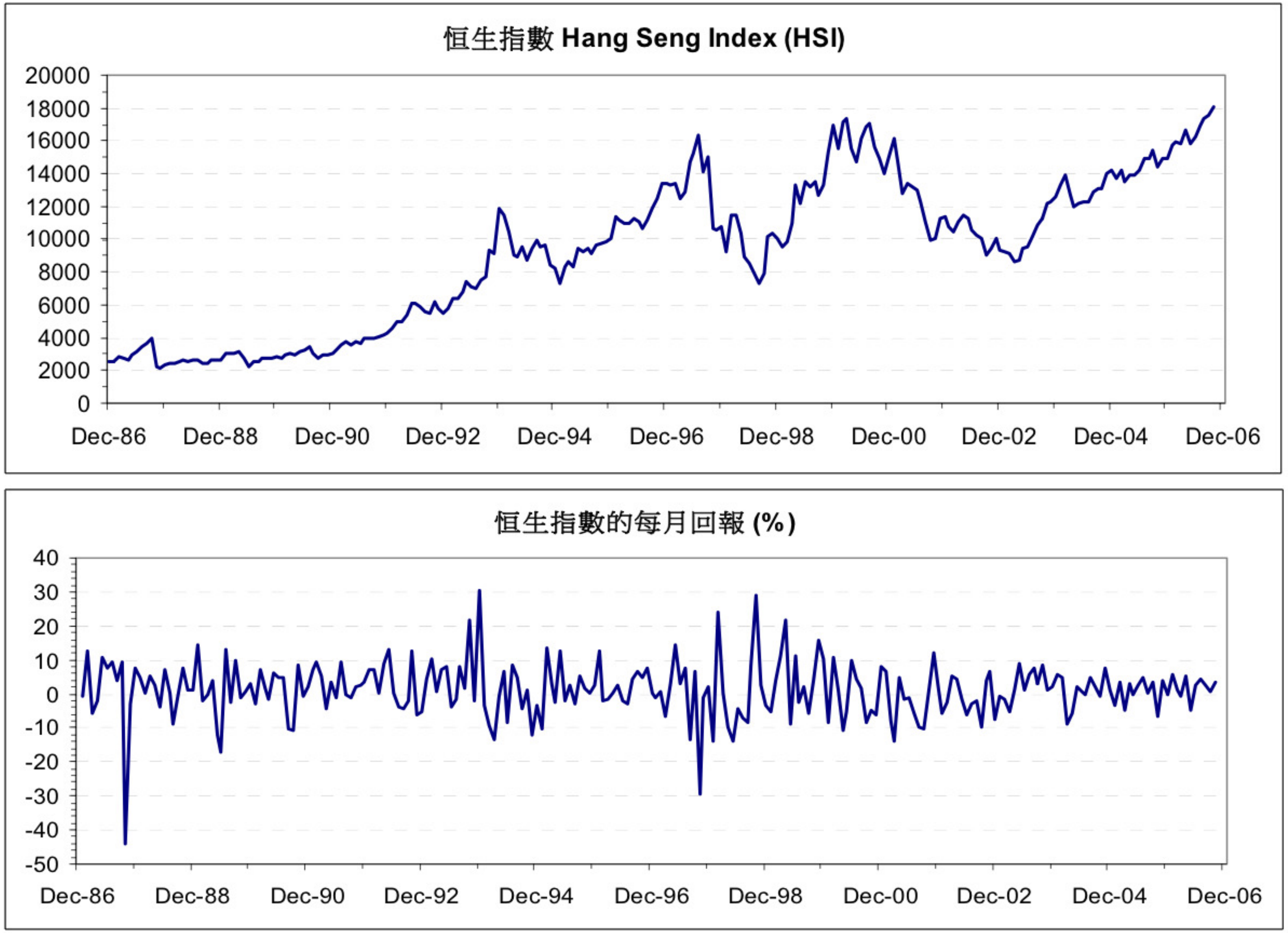
回報率	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月
投資 A	3%	–1%	4%	1%	2%	–3%
投資 B	2%	–2%	1%	3%	2%	1%

由表六得出如表七的預期回報率及風險：

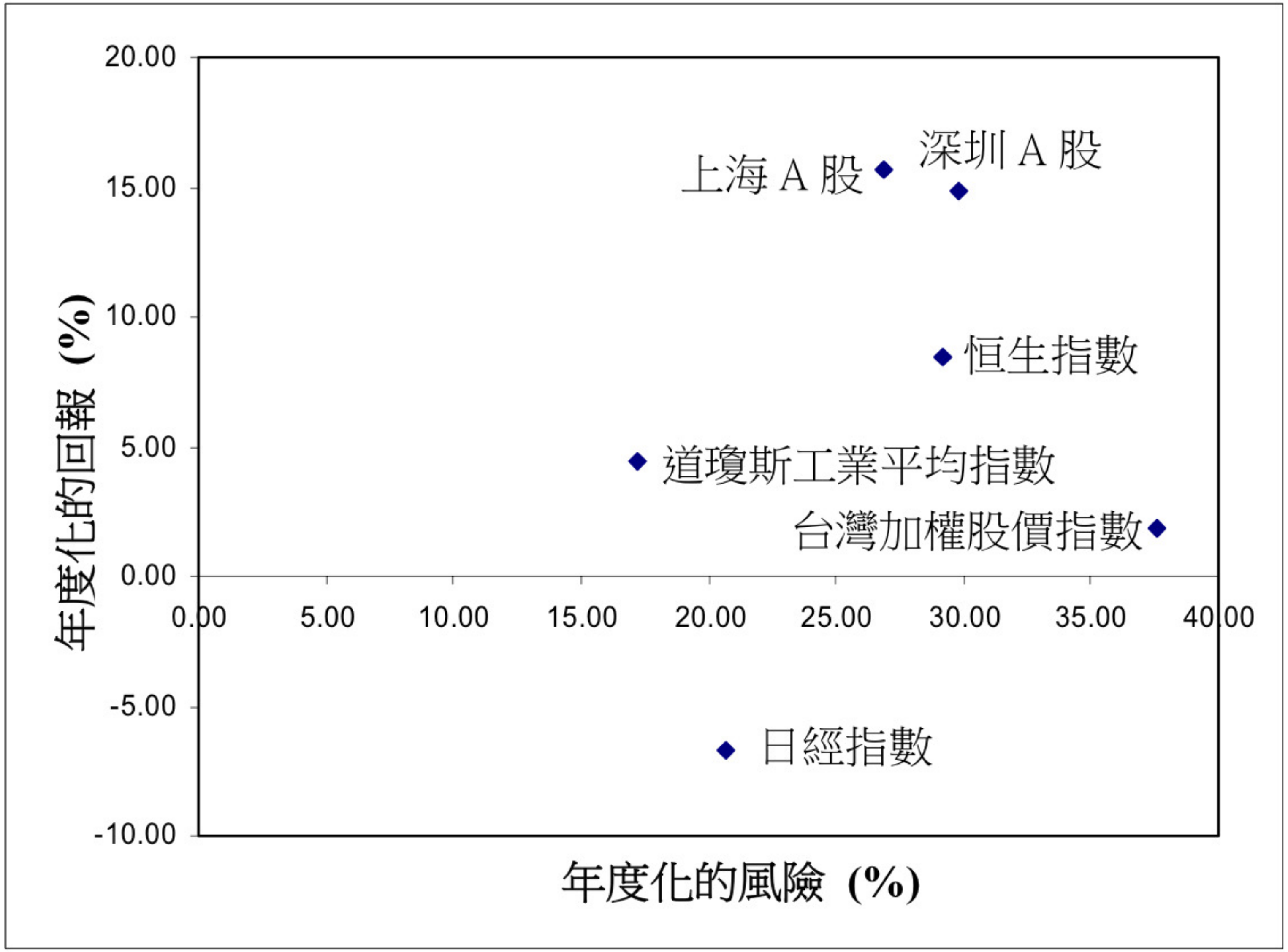
表七

	回報率	風險
投資 A	1.00%	2.61%
投資 B	1.17%	1.72%

圖二： 恒生指數的走勢圖和每月回報的時間序列圖



圖三：　國際股票市場指數的回報及風險（1999-2001）

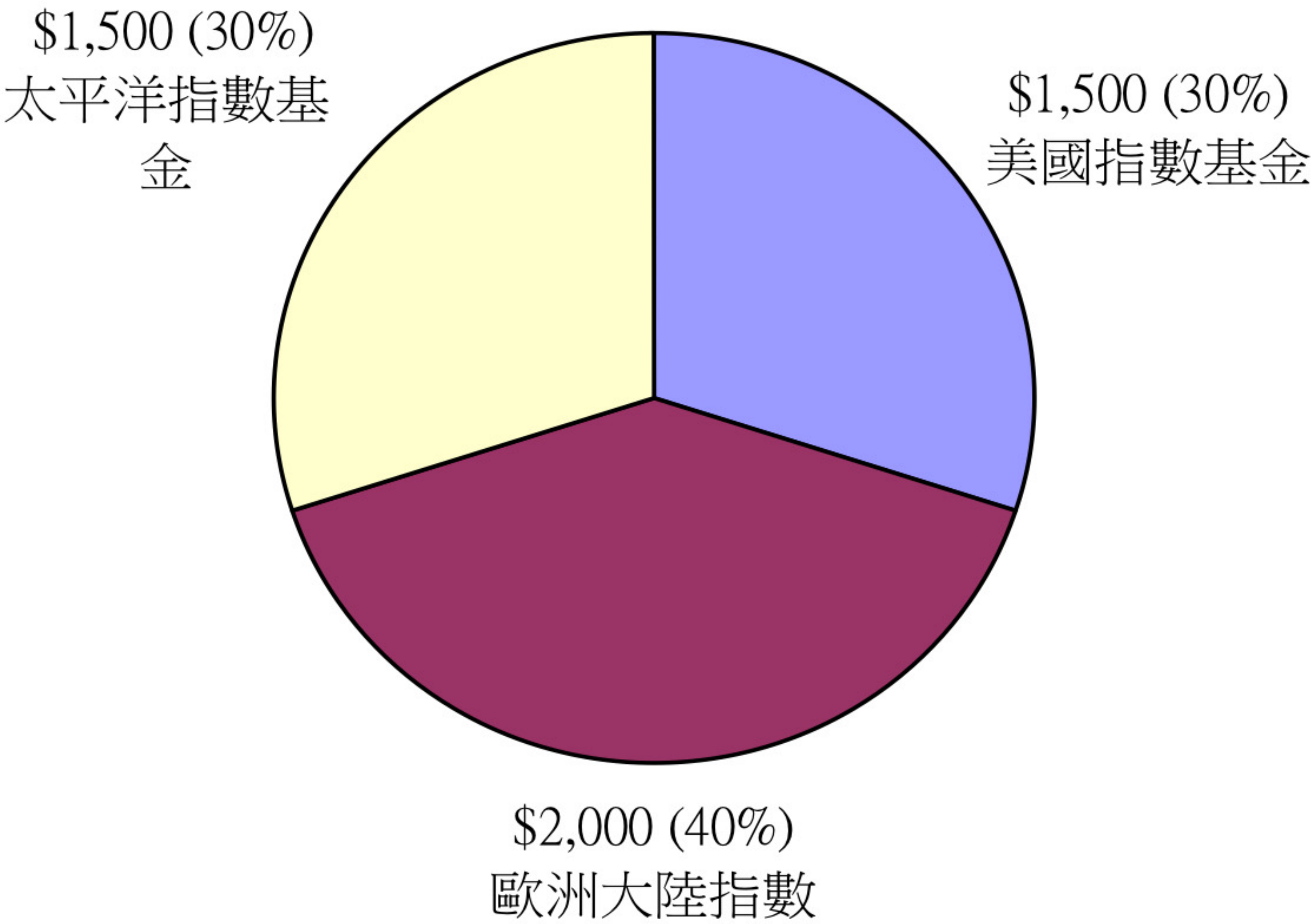


投資組合， $P = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ，的回報率，R_p：

$R_p = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \ldots + x_k R_k$ ； $x_1 + x_2 \ldots + x_k = 1$

其中 R_i 為第 i 隻資產的回報率。

圖四： 五千元環球投資組合



- 投資組合的回報率，R_p：

$$R_p = x_1 R_1 + x_2 R_2 \text{；} \qquad x_1 + x_2 = 1$$

而它的預期回報率及風險也不難求得。

- 投資組合的預期回報率，μ_p：

$$\mu_p = E(R_p) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2)$$

$$= x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2$$

- 投資組合的風險，σ_p：

$$\sigma_p^2 = \mathrm{Var}(R_p) = x_1^2 \mathrm{Var}(R_1) + x_2^2 \mathrm{Var}(R_2) + 2 x_1 x_2 \mathrm{Cov}(R_1, R_2)$$

$$= x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2 x_1 x_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$$

其中 $\sigma_{12} = \mathrm{Cov}(R_1, R_2) = \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$ 和 $\rho_{12} = \mathrm{Corr}(R_1, R_2)$

方差，$\mathrm{Var}(X) = E(X - \mu_x)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

協方差，$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$

- 特性一：$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$
- 特性二：$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)\mathrm{E}(Y)$
- 特性三：$\mathrm{Var}(aX + bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\mathrm{Cov}(X, Y)$

證明：$\mathrm{Var}(aX + bY)$

$= E[(aX + bY - (a\,\mu_x + b\,\mu_y))^2]$

$= E[(a(X - \mu_x) + b(Y - \mu_y))^2]$

$= E[(a^2(X - \mu_x)^2 + b^2(Y - \mu_y)^2 + 2ab(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$

$= a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\mathrm{Cov}(X, Y)$

- 相關係數：$\mathrm{Corr}(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}$
- 特性一　：$-1 \le \mathrm{Corr}\,(X, Y) \le 1$
- 特性二　：$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ 當且僅當 $\mathrm{Corr}(X, Y) = 0$

- 特性三　：當 X 及 Y 是獨立時，則 $\text{Corr}(X, Y) = 0$；但相反不一定是對的。

若 $X \sim N(0, 1)$，而 $Y = X^2$，那麼 X 和 Y 當然不是獨立的。但 $E(X) = 0$；$E(Y) = 1$；$E(XY) = E(X^3) = 0$，

因此，

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0，即 \mathrm{Corr}(X, Y) = 0。$$

由此可見，

$\mathrm{Corr}(X, Y) = 0$ 不代表 X 和 Y 是獨立的。

例五 投資組合的回報及風險的計算

表八

經濟環境	機會率	股票 1 的回報率	股票 2 的回報率	投資組合的回報率（0.3, 0.7）
興旺	0.4	3%	5%	4.4%
正常	0.3	4%	4%	4.0%
衰弱	0.3	6%	3%	3.9%
預期回報率，$E(R)$		4.2%	4.1%	4.13%
$E(R^2)$		0.00192	0.00175	0.0017107
風險		1.249%	0.831%	0.224%

我們先求投資組合在不同的經濟環境下的回報率：

市場氣氛興旺時：$0.3(3\%) + 0.7(5\%) = 4.4\%$

市場氣氛正常時：$0.3(4\%) + 0.7(4\%) = 4.0\%$

市場氣氛衰弱時：$0.3(6\%) + 0.7(3\%) = 3.9\%$

之後，我們用以上的資料去計算投資組合的預期回報率和風險：

- 預期回報率，$E(R_p) = 0.4(4.4\%) + 0.3(4.0\%) + 0.3(3.9\%)$

  $= \mathbf{4.13\%}$

- $E(R_p^2) = 0.4(4.4\%)^2 + 0.3(4.0\%)^2 + 0.3(3.9\%)^2$

  $= 0.001\ 710\ 7$

- 風險 $\sigma_p = (0.001\ 710\ 7 - 0.041\ 3^2)^{0.5} = \mathbf{0.224\%}$

方法一

我們先求每種股票的預期回報率和風險：

- $E(R_1)$： $0.4(3\%) + 0.3(4\%) + 0.3(6\%) = 4.2\%$
- $E(R_2)$： $0.4(5\%) + 0.3(4\%) + 0.3(3\%) = 4.1\%$
- $E(R_1^2)$：$0.4(3\%)^2 + 0.3(4\%)^2 + 0.3(6\%)^2 = 0.001\ 92$
- $E(R_2^2)$： $0.4(5\%)^2 + 0.3(4\%)^2 + 0.3(3\%)^2 = 0.001\ 75$
- σ_1：$(0.001\ 92 - 0.042^2)^{0.5} = 1.249\%$
- σ_2：$(0.001\ 75 - 0.041^2)^{0.5} = 0.831\%$

之後，我們根據以上的資料去計算投資組合的預期回報率和風險：

- 預期回報率， $E(R_p)$：0.3(4.2%) + 0.7(4.1%) = **4.13%**
- $E(R_1R_2)$：0.4(3%)(5%) + 0.3(4%)(4%) + 0.3(6%)(3%)

  $= 0.001\ 62$
- $\mathrm{Cov}(R_1,R_2) = E(R_1R_2) - E(R_1)E(R_2)$

  $= 0.00162 - (4.2\%)(4.1\%) = -0.000\ 102$
- $\mathrm{Corr}(R_1,R_2) = \dfrac{-0.000102}{0.01249 \times 0.00831} = \dfrac{-1.02}{(1.249)(0.831)} = -0.983$
- $\mathrm{Var}(R_p) = (0.3)^2 \times (1.249\%)^2 + (0.7)^2 \times (0.831\%)^2 + 2(0.3)(0.7)(-0.000\ 102)$

  $= 0.000\ 005\ 04$

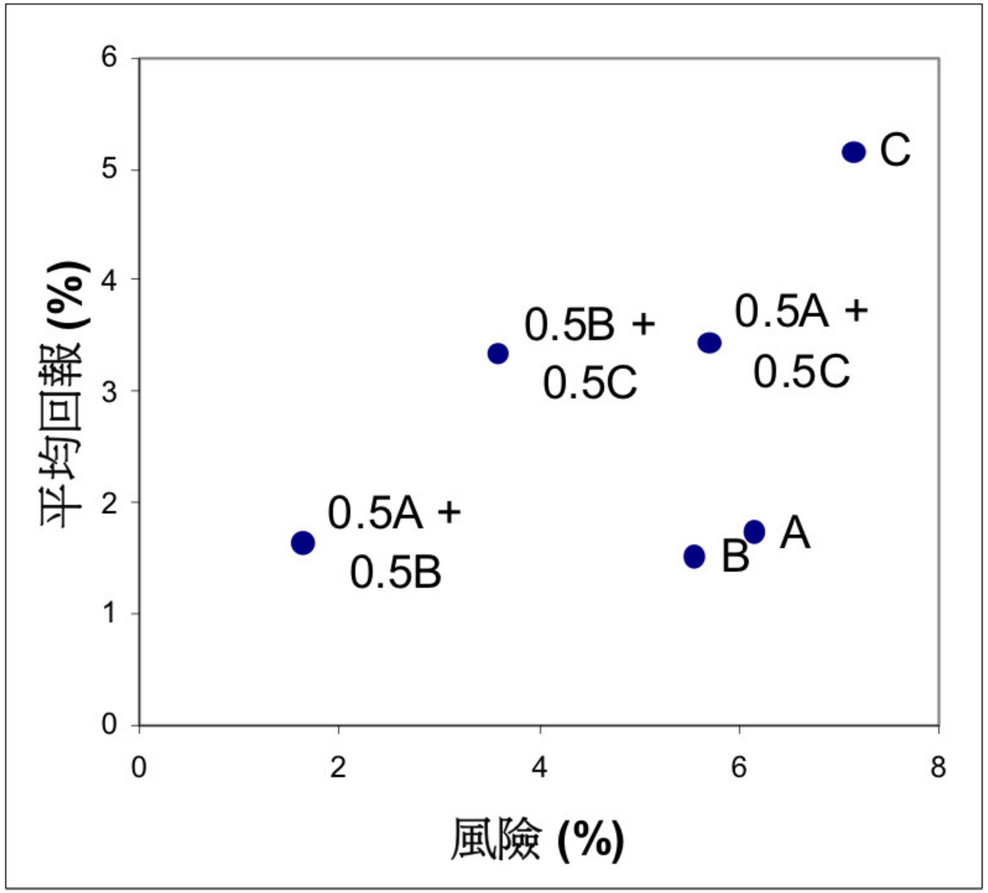
風險 σ_p： $(0.000\ 005\ 04)^{0.5} = \mathbf{0.224\%}$

例六 分散投資

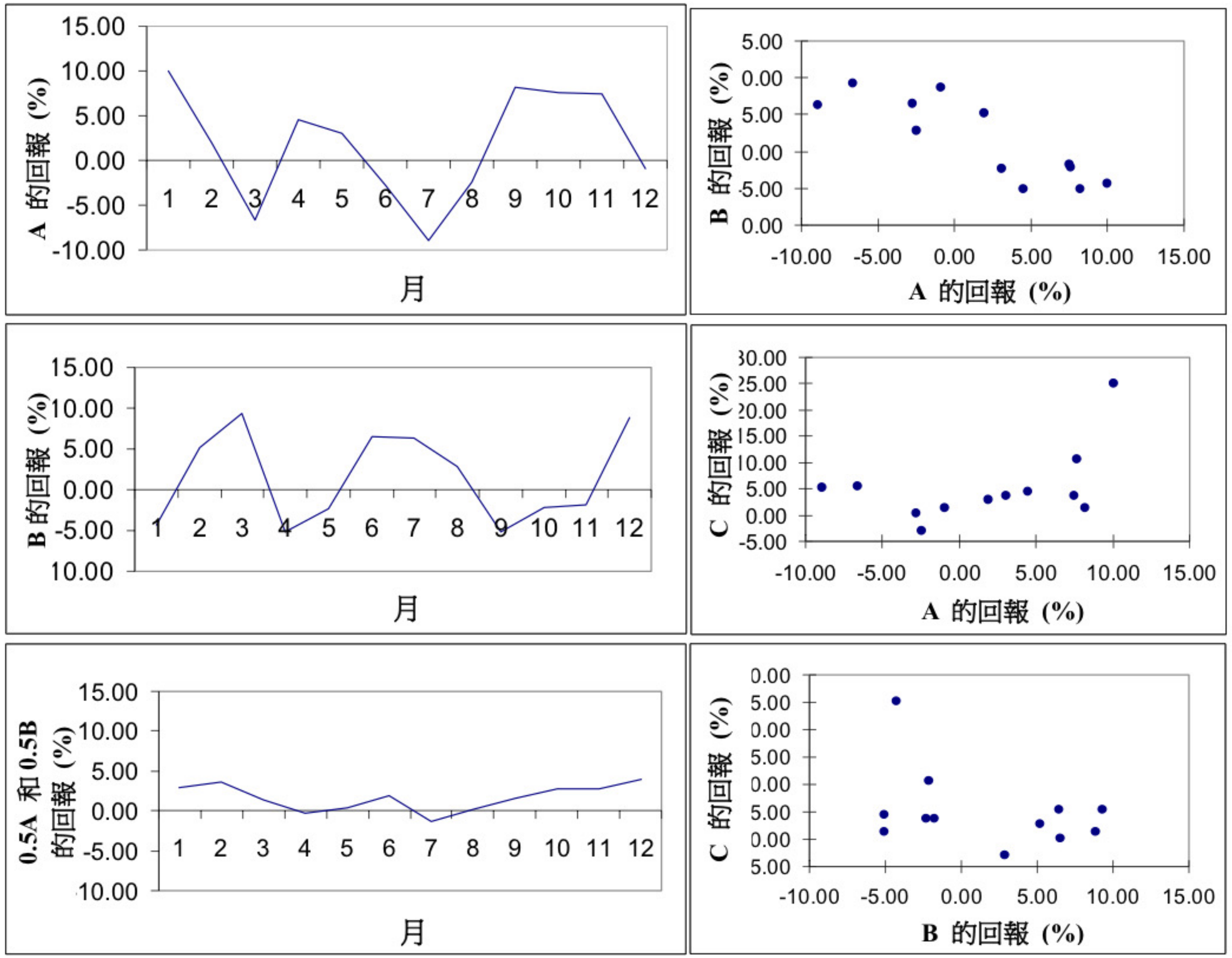
表九

	每月回報率(%)					
月	**A**	**B**	**C**	**0.5A + 0.5B**	**0.5A + 0.5C**	**0.5B + 0.5C**
1	10.00	–4.30	25.20	2.85	17.60	10.45
2	1.90	5.20	2.86	3.55	2.38	4.03
3	–6.60	9.30	5.45	1.35	–0.58	7.38
4	4.47	–5.10	4.56	–0.32	4.52	–0.27
5	3.07	–2.30	3.72	0.39	3.40	0.71
6	–2.79	6.52	0.29	1.87	–1.25	3.41
7	–8.97	6.40	5.38	–1.29	–1.80	5.89
8	–2.45	2.82	–2.97	0.19	–2.71	–0.08
9	8.17	–5.10	1.52	1.54	4.85	–1.79
10	7.62	–2.10	10.75	2.76	9.19	4.33
11	7.48	–1.80	3.79	2.84	5.64	1.00
12	–0.94	8.80	1.32	3.93	0.19	5.06
平均回報率	1.75%	1.53%	5.16%	1.64%	3.45%	3.34%
風險	6.15%	5.54%	7.14%	1.63%	5.69%	3.58%

圖五： 回報風險圖



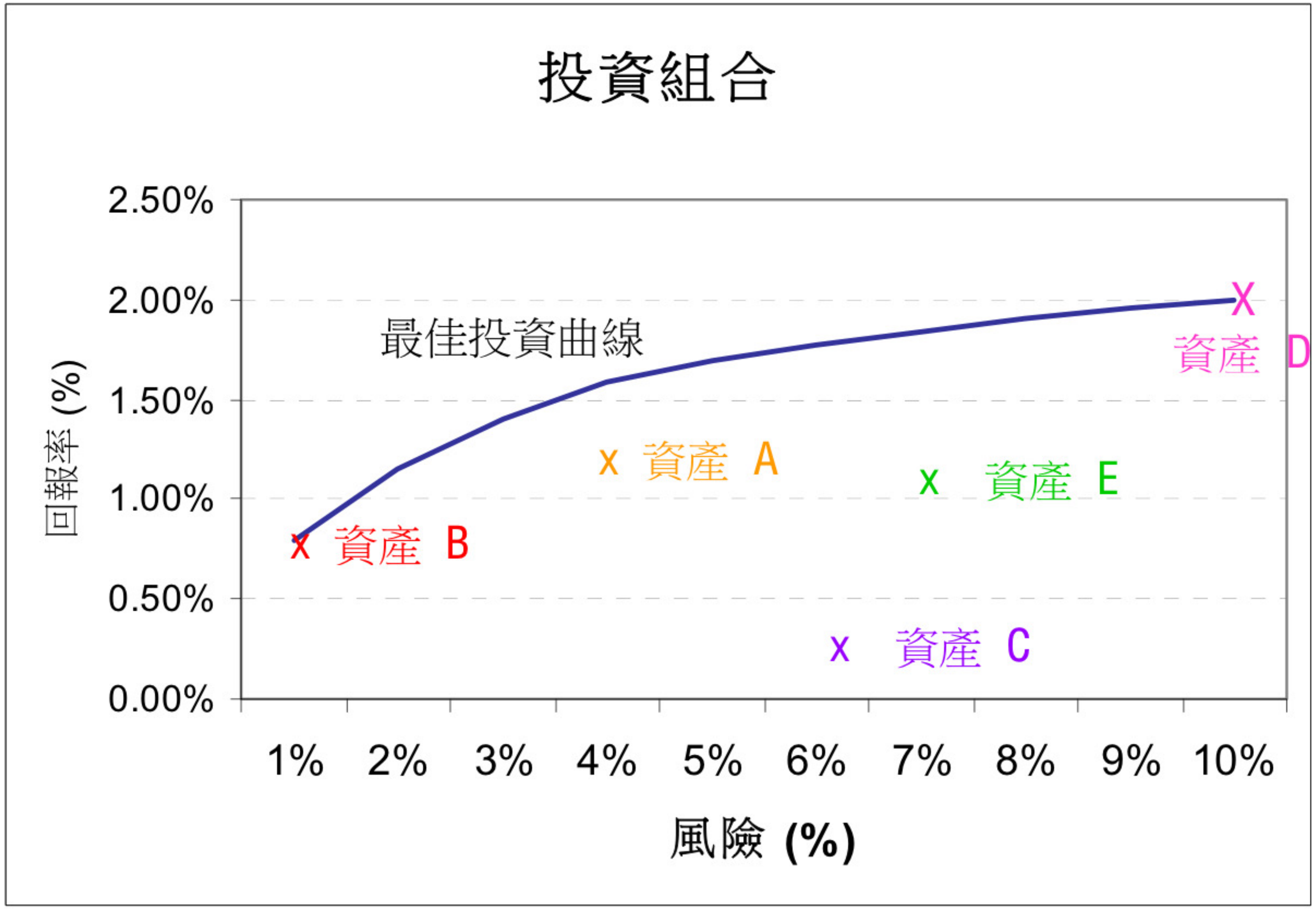
圖六： 股票 A、股票 B 和組合 A 及 B 的每月回報率圖
及股票 A、B 和 C 的回報散點圖



表十　：美國資產的相關係數 (1926-1999)

美國資產類	1	2	3	4	5	6	7
1.大型公司	1						
2.小型公司	0.79	1					
3.長期企業債券	0.25	0.10	1				
4.長期政府債券	0.19	0.02	0.94	1			
5.中期政府債券	0.11	–0.04	0.91	0.91	1		
6.短期政府債券	–0.02	–0.09	0.21	0.24	0.49	1	
7.通脹率	–0.03	0.05	–0.15	–0.15	0.01	0.41	1

圖七： 效率前緣／最佳投資曲線



感謝聆聽