數學思維與解題期末報告

主題:河內塔

組別:第二組

組員: 06 張心玫、08 魏碩廷、09 羅允澤、
28 蔣一豪、36 陳筠婷、42 倪詩晶

一、河內塔的來源:

最早發明這個問題的人是法國數學家愛德華·盧卡斯。傳說越南河內某間寺院有三根銀棒，其中一根上串 64 個金盤。寺院裡的僧侶依照一個古老的預言，移動這些圓盤；預言說當這些圓盤移動完畢，世界就會滅亡。這個傳說叫做梵天寺之塔問題（Tower of Brahma puzzle)。但不知道是盧卡斯自創的這個傳說，還是他受他人啟發。若傳說屬實，僧侶們需要$2^{64}-1$步才能完成這個任務；若他們每秒可完成一個盤子的移動，就需要 585 億年才能完成。整個宇宙現在也不過 137 億年。

這個傳說有很多版本：寺院換成修道院、僧侶換成修士等等。寺院的地點眾說紛紜，其中一說是位於越南的河內，所以被命名為「河內塔」。另外亦有「金盤是創世時所造」、「僧侶們每天移動一盤」之類的。

二、遊戲規則

有三根杆子 A、B、C。A 杆上有 N 個(N>1)穿孔圓盤，圓盤的尺寸由下到上依次變小。要求按下列規則將所有圓盤移至 C 杆：

1. 每次只能移動一個圓盤；
2. 大盤不能疊在小盤上面。

問：如何移？最少要移動多少次？

提示：可將圓盤臨時置於 B 杆，也可將從 A 杆移出的圓盤重新移回 A 杆，但都必須遵循上述兩條規則。

三、遊戲示範

以 3 杆 3 圓盤河內塔為例，首先全都串在其中一根杆子上，由下到上，再由大到小順序放置。將所有的圓盤，依照規則，移到另一根杆子上。

四、算法求解

假設有三根杆子，其中一根杆子上有 N 個圓盤，大盤在小盤的下方。如果要將它們全部移到另一根杆子，仍保持大盤在小盤的下方，總共需移動 T(N)次。

$T(1)=1$

$T(2)=2T(1)+1=2+1=3$

$T(3)=2T(2)+1=2^2+2+1=7$

$T(4)=2T(3)+1=2^3+2^2+2+1=15$

…

$T(N)=2^{N-1}+2^{N-2}+........+ 2^3+2^2+2+1=2^N-1$

如果 N=64，假設移動一次需一秒，將 64 個圓盤全數移到另一根杆子，總共需移動 T(64)次，需 T(64)秒，而 T(64)= $2^{64}-1=5.85\times10^{11}$ 秒，約 585 億年。

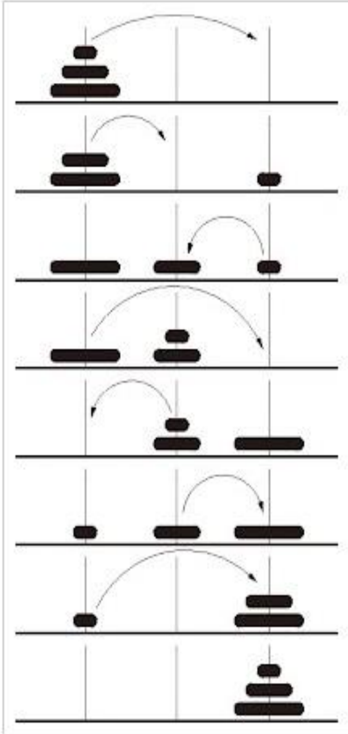
五、圖像解釋

可以用無向圖來表示河內塔，在表示的時候會更加地直觀和清晰。現在規定，每一個節點表示圓盤的位置一種可能性，每一條邊表示一種移動的方法。（這裡不考慮在兩個杆子之間的，沒有意義的，

來回移動的情況。）

無向圖：圖形上我們用一條線連接兩個定點的直線來表示，並且不畫上箭頭。

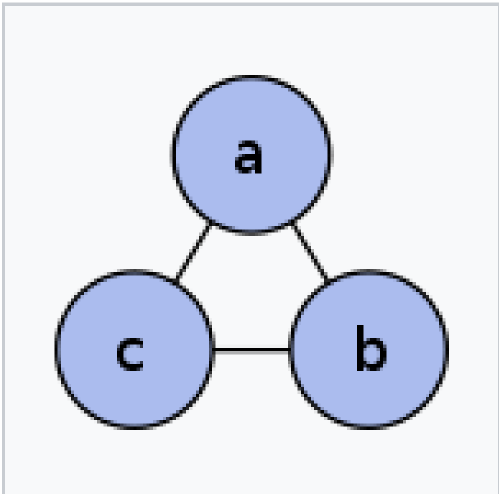
藉由圖論，把每一種情況當作一個點，若移動一個盤就能兩者互通的話，就把兩點連一條邊，如此則形成所有狀態及其關聯的圖：



- 移動示意圖

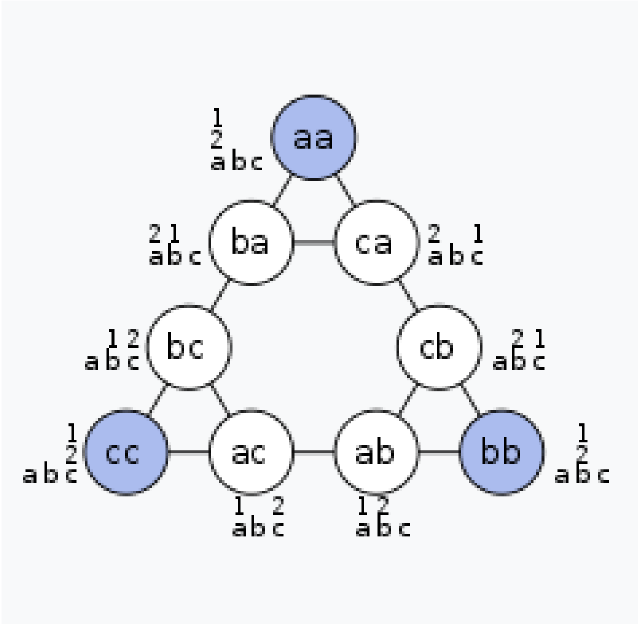
a. 一個圓盤的河內塔：

把三根杆子編號為 a、b、c；圓盤的編號為 1，若 1 個圓盤都放在 a 杆的話，就把這種情況記為「a」。



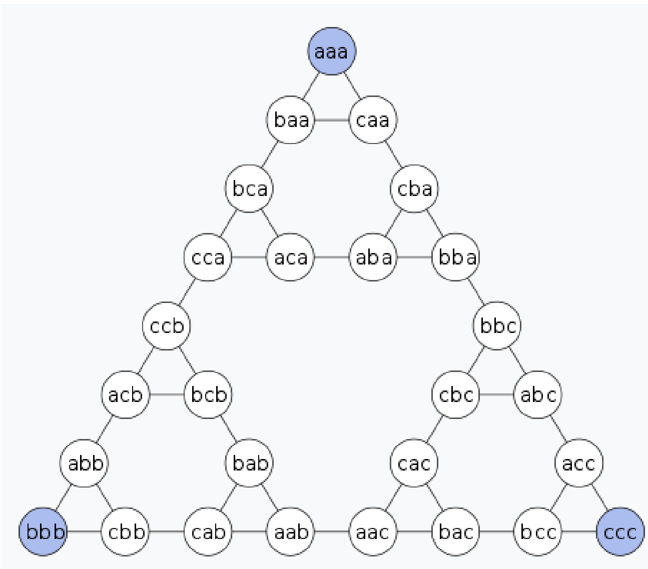
b. 兩個圓盤的河內塔：

把三根杆子編號為 a、b、c；圓盤由小到大編號為 1、2。若兩個圓盤都放在 a 杆的話，就把這種情況記為「aa」；若 1 號圓盤在 c 杆，2 號圓盤在 b 杆，就記為「cb」。每一個節點的第二個字母表示更大的盤子，且最初時沒有被移動；對於每一個頂端的小三角形，表示一個圓盤移動的方式。

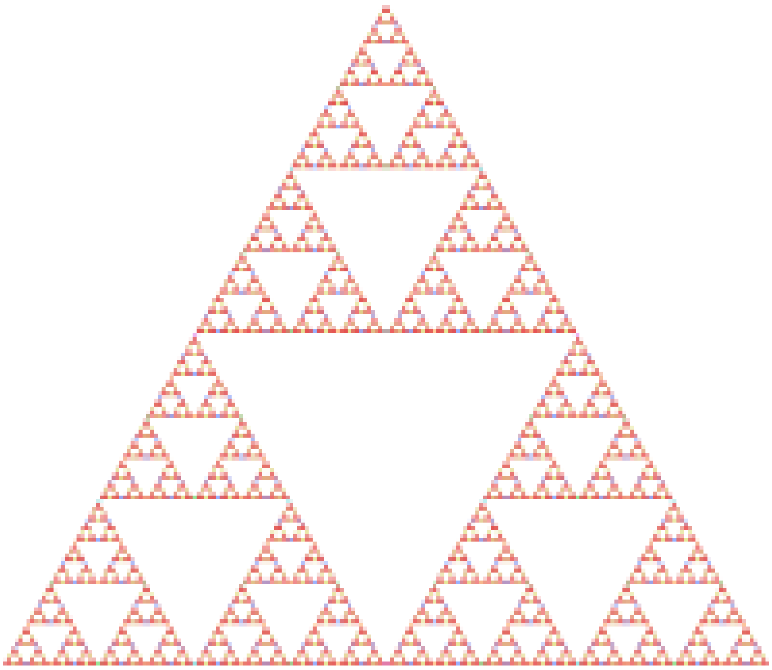


c. 三個圓盤的河內塔:

把三根杆子編號為 a、b、c;圓盤由小到大編號為 1、2、3。若 3 個圓盤都放在 a 杆的話，就把這種情況記為「aaa」;若 1 號圓盤在 c 杆，2、3 號圓盤都在 b 杆，就記為「cbb」。邊上的三角形的每一個節點，表示在一個杆子上圓盤的所有分佈可能。



d. 補充說明:

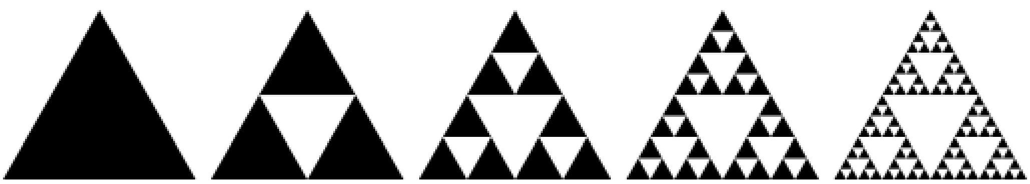


- 具有 3 桿 7 個盤子的河內塔的圖與

7 級的謝爾賓斯基三角形的聯繫

謝爾賓斯基三角形:

1. 取一個實心的三角形。(多數使用等邊三角形)
2. 沿三邊中點的連線，將它分成四個小三角形。
3. 去掉中間的那一個小三角形。
4. 對其餘三個小三角形重複以上步驟



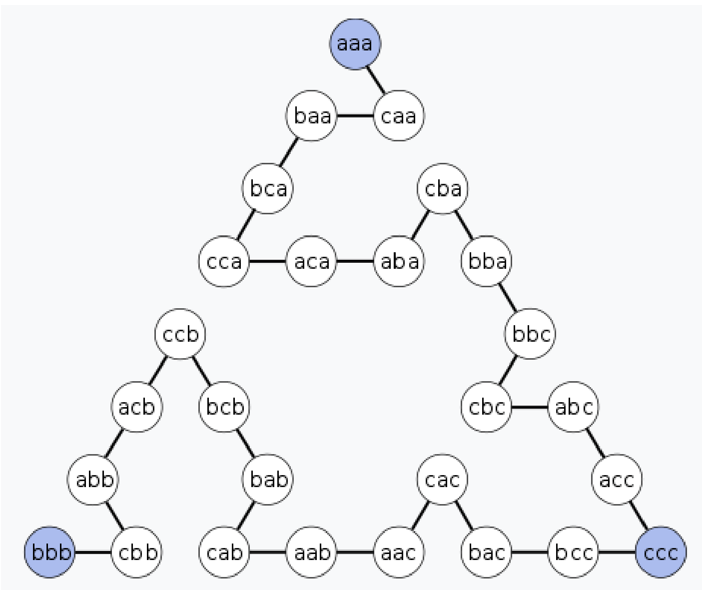
e. 結論:

從上述我們可以得知，相互連接的三個三角形，組成了一個較大三角形的三個角。對於具有 n 個圓盤的無向圖，有3^n個節點；對於 n+1 個圓盤，就可以"複製" n 個圓盤時候的三角形圖，然後拼成一個新的大三角形圖，稍微改動一下，那麼這個大的三角形圖就可以用來表示 n+1 個圓盤時的情況了!!!

六、補充

a. 最多步數的移法:

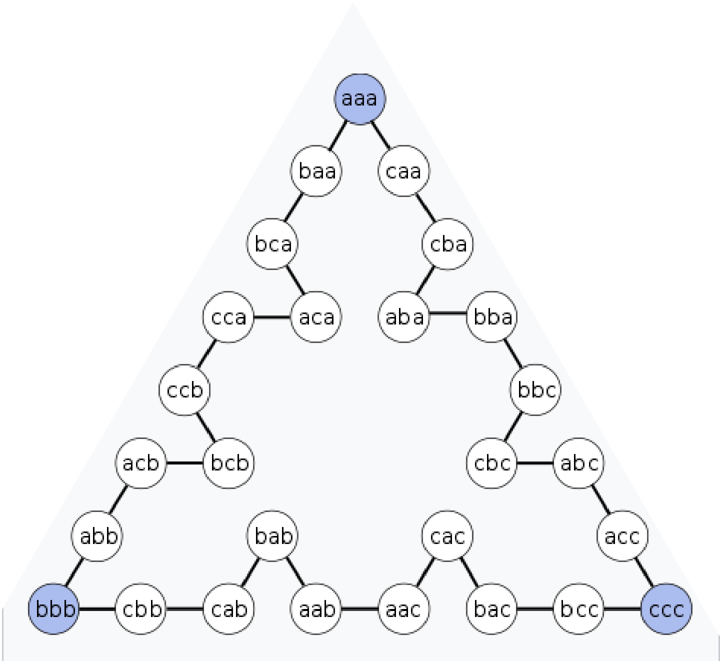
有最少步的走法，自然就會有最多步的走法。這裡講的「最多步」指的是「不重複的最多步走法」，也就是狀態說不能重複。這裡有一個天然上界:既然不能重複，那所有的狀態數--3^n-1就是極限了(在討論 3 杆 n 盤的情況下)。



- 3 圓盤從「aaa」移到「bbb」的最多步走法

b. 哈密頓迴路:

對於任意的全部圓盤在一根杆子的情況下，將所有圓盤移動數次再回到原本的杆子的最短路徑只有一個。途中經過所有其他節點且只經過一次。



七、相關內容

a. 2011 年電影《猿人爭霸戰：猩凶革命》曾出現利用河內塔來測試猩猩智商的內容。其後續電影《猩球崛起 2》中也有類似的場景。

b. 九連環

八、參考資料

a. 維基百科:漢諾塔(港臺：河內塔)

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%B1%89%E8%AF%BA%E5%A1%94

b. 河內塔遊戲

http://www.mathland.idv.tw/game/hanoi/hanoi.htm

c. 〔離散數學〕河內塔難題再下一塔

https://sites.google.com/a/g2.nctu.edu.tw/unimath/2017-11/Hanoi

d. 維基百科:謝爾賓斯基三角形

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%AC%9D%E7%88%BE%E8%B3%93%E6%96%AF%E5%9F%BA%E4%B8%89%E8%A7%92%E5%BD%A2

e. 維基百科:哈密頓迴路

https://baike.baidu.hk/item/%E5%93%88%E5%AF%86%E9%A0%93%E8%BF%B4%E8%B7%AF/5575399