數學思維與解題期末報告

第三組

主題:最優終止法則

組員: 410731248曾湇湞

411031102戴世勳

411031103潘柏銓

411031107林亮辰

411031113黃俊穎

411031123李柔樺

目錄

最優終止法則之探究

壹、前言

最初想到製作最優終止法則這項問題是因為數學史課程有接觸到，與組員們溝通過後，大家也都對這項主題有很高的興趣，透過上網搜尋，我們發現此法則可以運用在很多生活例子上，甚至有美國數學家用這個法則出了一本愛情數學的書

貳、內容

一、如何選購二手音響?

某無線電月刊，差不多每期都有一份出讓二手音響器材的廣告，對每一部出讓的音響器材，你可以根據它的年份、牌子、狀態來估計它的合理價錢，通常這個你認為是合理的價錢不一定等於真正的售價，為了看看購買這部二手音響器材有沒有滑算，你可以計算它的超值率E。

超值 = 合理價錢-售價

超值率E = [(合理價錢-售價)/(售價)]100%

例題1一部二手音響器材售1000元，你估計它應該值1200元這部二手音響器材的超值和超值率是多少?

<sol>

超值 = 合理價錢-售價 = 1200-1000 = 200

超值率E = [(合理價錢-售價)/(售價)]100% = (200/1000)100% = 20%

例題2一部二手音響器材售1000元，你估計它應該值900元這部二手音響器材的超值和超值率是多少?

<sol>

超值 = 合理價錢-售價 = 900-1000 = -100

超值率E = [(合理價錢-售價)/(售價)]100% = (-100/1000)100% = -10%

顯然，超值率越高的二手音響器材是越值得購買，假定你計劃由1月至12月這年內購買一部二手音響器材，怎樣辦才可以選購到最高超值率的一部呢?最理想的辦法是等到年底，然後把十二個月來在廣告上出現過的二手音響器材比較一番，看看哪部超值率最高便買那部。然而，這個辦法不切實際因為等到年底才作出決定是太遲了，你心目中想買的一部可能早已沽出，要買在某月份廣告上出現的二手音響器材你必須在那個月便作出決定，由於有了這個限制，沒有一個方法能夠保證你一定買到最高超值率的二手音響器材。但有沒有方法使我們有較大機會買到最高超值率的二手音響器材呢?這又得勞煩概率論了。

一個很普通的方法是碰運氣。在12個月中隨意選一個月，然後購買在那個月的廣告上出現的二手音響器材。用這個方法，買到最高超值率的二手音響器材的概率是$\frac{1}{12}$，有沒有其他方法能夠提高這概率呢?上面的方法有一個明顯的缺點，就是沒有試圖利用已知的數據。舉例來說，在五月時我們已經知道前四個月那四部音響器材的超值率，應該拿五月那部音響器材的超值率跟前四個月那四部的超值率來比較，從而決定是否選購五月份的那部。這個試圖利用已知數據的選購方法，照理是比前一個方法高明一些，但是否真的如此呢?我們需要作一點概率的計算。

為便於說明起見，不如進一步把問題簡化，把時間由12個月縮短為3個月，即是

要求在三個月內選購一部二手音響器材，讓我們比較兩個不同的選購方法:

(A)一個不利用數據的選購方法。在三個月中隨意選一個月，買那個月的音響器材。這樣做買到最高超值率的一部的概率是$\frac{1}{3}$。

(B)一個利用最優終止法則的選購方法 ☞ 一定不買一月那部，如果二月那部的超值率較一月那部的超值率高，便買二月那部，否則便買三月那部。這樣做，當然有利也有弊。如果碰巧一月份那部的超值率是最高的話，便失諸交臂。但我們卻利用一月份的數據，幫助我們作出決定。

讓我們計算用(B)買到最高超值率的二手音響器材的概率，假定A的超值率最高、B其次、C又其次。這三部音響器材可能以不同的次序在三個月出現，共有6個可能的結果，就是(ABC)、(ACB)、(BAC)、(BCA)、(CAB)、(CBA)，括號裏的次序按一月、二月、三月來排，我們沒有任何資料指出哪一個次序較另一個更有可能發生，不妨假設每個發生的概率都是在這6個次序中，有三個次序(即是第一、第二、 第四)是二月份那部的超值率比一月份那部低，在那些情形底下，我們便選購三月份那部。其他三個次序(即是第三、第五、 第六)是二月份那部的超值率比一月份那部高，在那些情形下，我們便選購二月份那部。我們把6種可能發生的情形都列出來(如下表)，由此可以見到，買到最高超值率那部的概率是:

可能次序	概率	購買月份	購買的二手樂器
ABC	1/6	三月	C
ACB	1/6	三月	B
BAC	1/6	二月	A*
BCA	1/6	三月	A*
CAB	1/6	二月	A*
CBA	1/6	二月	B

*= 購買到超值率最高的那部

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$比較用(A)買到最高超值率那部的概率是大了。在概率論裏，有關這類問題的研究，叫做「最優中止法則」(Optimal Stopping Rule)。

二、如何選購二手音響?(最優終止法則延伸比較)

如果我們把選購月份增加至四個月，會發生什麼有趣的事情呢?首先我們在終止的月份就有一月和二月可以選擇，另外，如果是在一月終止，後面的月份如何篩選也是個學問，我們簡單整理如下:

①一月一定不買，二月跟一月比，如果超值率較高則買下，沒有的話繼續比第三個月的，第三月的超值率高於一月的話就買下，否則就買第四個月的。

②一月一定不買，二月跟一月比，如果超值率較高則買下，沒有的話繼續比第三個月的，但是把一月刪除不繼續做比較，也就是三月只須和二月比，如果三月超值率高於二月就買下，否則買四月的。

③一二月一定不買，三月跟一二月比，超值率有高於前者就買下，否則就買四月。

讓我對這些方法加以舉例說明:

假定A的超值率最高、B其次、C又其次、D更其次。這四部音響器材可能以不同的次序在四個月出現，今天假如題目設定ABCD出現順序為ADBC:

法①: A一定不選，接下來D<A，因此D不選，然後B<A，所以B也不選，最終結果只能挑C。

法②: A一定不選，接下來D<A，因此D不選，但同時我們再也不看A，然後下一

個B只須跟剛剛的D比較，而B>D，所以選B。

法③: AD一定不選，接下來B跟前兩月AD比，顯然B未能完全勝利(B<A)，因此B不選，最終結果只能挑C。

由此我們發現，隨著終止月份不同，或是後續比較方式不同皆會影響最終結果，接下來，我們就來仔細比較一下這些結果。

比較①②

可能次序	方法一	方法二
ABCD	D	D
ABDC	C	C
ACBD	D	B
ACDB	B	B
ADBC	C	B
ADCB	B	C

可能次序	方法一	方法二
BACD	A	A
BADC	A	A
BCAD	A	A
BCDA	A	A
BDAC	A	A
BDCA	A	C

可能次序	方法一	方法二
CABD	A	A
CADB	A	A
CBAD	B	B
CBDA	B	B
CDAB	A	A
CDBA	B	B

可能次序	方法一	方法二
DABC	A	A
DACB	A	A
DBAC	B	B
DBCA	B	B
DCAB	C	C
DCBA	C	C

①一月一定不買，二三月依序跟一月比，超值率有高於前者的買下，否則就買四月。此法買到最高超值率的一部的概率是0.46 $=\frac{11}{24}$; 買到最低超值率的一部的概率是0.08 $=\frac{2}{24}$

②一月一定不買，二月跟一月比，二月較高則買; 一月較高則不買，但是把較高月刪除。此法買到最高超值率的一部的概率是0.42 $=\frac{10}{24}$; 買到最低超值率的一部的概率是0.04 $=\frac{1}{24}$

結論: 同樣是最優終止法則，且終止時間相同，但篩選方式不同，交易結果也會不同。方法一容易買到最高超值率，但也容易買到最低超值率; 方法二比較不容易買到最高超值率，但也不會輕易買到最低超值率，所以兩方法勝負難定!!

比較①③

可能次序	方法一	方法三
ABCD	D	D
ABDC	C	C
ACBD	D	D
ACDB	B	B
ADBC	C	C
ADCB	B	B

可能次序	方法一	方法三
BACD	A	D
BADC	A	C
BCAD	A	A
BCDA	A	A
BDAC	A	A
BDCA	A	A

可能次序	方法一	方法三
CABD	A	D
CADB	A	B
CBAD	B	A
CBDA	B	A
CDAB	A	A
CDBA	B	B

可能次序	方法一	方法三
DABC	A	C
DACB	A	B
DBAC	B	A
DBCA	B	A
DCAB	C	A
DCBA	C	B

①一月一定不買，二三月依序跟一月比，超值率有高於前者的買下，否則就買四月。

此法買到最高超值率的一部的概率是0.46 $=\frac{11}{24}$; 買到最低超值率的一部的概率是0.08 $=\frac{2}{24}$

③一二月一定不買，三月跟一二月比，超值率有高於前者就買下，否則就買四月。此法買到最高超值率的一部的概率是0.42 $=\frac{10}{24}$; 買到最低超值率的一部的概率是0.17 $=\frac{4}{24}$

結論: 同樣是最優終止法則，但終止時間不同，交易結果也會不同。很明顯方法三不管買最高超值率或是最低超值率都呈現較弱於方法一的結果，因此從何切割也是一門學問。後面會有我們組員介紹最好的終止界線。

三、最優終止法則

(一) 在概論及博奕論上，**秘書問題**（Secretary problem），類似的名稱有**相親問題、止步問題、見好就收問題、蘇丹的嫁妝問題、挑剔的求婚者問題**等，屬於最佳終止法則。

(二) 背景故事

若要論起相親問題最早的雛型，基本可溯源到 1611 年歷史上發生的一件趣事。當時遠近馳名的天文學家克卜勒 (Kepler) ，在一次傷寒的意外中失去了他摯愛的妻子，隨著妻子的離去，獨留下來的克卜勒為了照顧孩子、打理家務，打算再娶一位新的老婆來幫忙。

那時他一共找了 11 位候選人來當他的對象，希望在這裡面能遇到符合他期待的女子，接下來他要做的就是一一與他們會面，並且從中找出他最對上眼的。

於是他開始逐次與這些女子相處，身為一個科學家，他也不免俗嚴謹地將對女子的評價一一記錄下來，當他相處到第四位女子時，他覺得自己已經找到了真愛，可以停止繼續會面下一個對象了。

雖然他到最後還是決定跟剩下的女子再約過一輪會，並且選中其中的第五位女子，但他這種情境的問題，到了二十世紀中葉，開始廣泛為人討論。

參考資料: 擇你一個命中註定—談經典相親問題與其延伸解

(三) 麥穗理論

兩千五百年前，三個學生問蘇格拉底一個問題：「怎樣才能找到理想的人生伴侶？」蘇格拉底帶著學生來到一片麥田前，並對他們說：「請你們走進麥田，一直往前不要回頭，途中摘下一支最大的麥穗，只能摘一支。」

第一個學生走進麥田。他很快就看見一支又大又漂亮的麥穗，於是很高興地摘下了這支麥穗。可是，他繼續往前走，發現有很多麥穗比他摘的那支大得多。他很後悔下手早了，只好遺憾地走完了全程。

第二個學生吸取了教訓。每當他想要摘麥穗時，總是提醒自己：後面還有更好的。不知不覺他走到了終點，卻一支麥穗都沒摘。他也很後悔，因為自己沒有把握住機會，總覺得後面會有更好的選擇，最後錯過了全世界。

第三個學生吸取了前兩者的教訓。他把麥田分為三段，走過第一段麥田時，只觀察不下手，並在心中把麥穗分為大、中、小三類； 走過第二段麥田時，他依然只觀察不下手，用來驗證第一段的判斷是否正確；走到第三段麥田，也就是最後三分之一時，他摘下了自己遇到的第一支屬於大類的麥穗。這可能不是最大的一支，但他心滿意足地走完了全程。

這三位學生的作法中，第三個學生提供了一個確定「最基本的滿意標準」的方法：首先是在第一個三分之一中觀察並把大類麥穗作為「最基本的滿意標準」；接著在第二個三分之一中驗證這個標準；最後摘下大類麥穗中的第一支，不再尋找更優方案。

結論：麥穗理論就是用三分之一的時間觀察，用三分之一的時間驗證這個觀察，得出「最基本的滿意標準」，然後在最後一個三分之一的時間哩，選擇第一個好於這個標準的，並不再尋找最優方案。

參考資料：麥穗理論━如何選擇人生中最大的那支麥穗？

秘書問題

- 求和符號內概率的計算是基於：如果應聘者 i 是（所有應聘者中的）最佳人選，他被選中若且唯若頭 i - 1 個應聘者中的最佳人選處在頭 r - 1 個被拒絕的應聘者中。令 n 趨近無窮大，把 x 表示為 r/n 的極限，令 t 為 i/n，dt 為 $1/n$，總和可以近似為如下積分：
-
- P(x)=x$\int_{\boldsymbol{x}}^{\mathbf{1}}(\mathbf{1}/\boldsymbol{t})\,\boldsymbol{dt}$=-xln(x)
-

- 令 $\mathrm{P}(x)$ 對 x 的導數為 0，解出 x，我們得到最優的 x 等於 $1/e$。從而，當 n 增大時，最優截斷值趨近於 n/e 最佳人選被選中的概率為 $1/e$。
- 對於較小的 n 值， 最優的 r 也可以通過動態歸化方法得到。

參考資料:秘書問題 維基百科

37 法則

- 1.經過數學家歐拉的實驗，以 37%作為分界點，前面的時間用來觀察，後面的時間用來做決策的一種方法。
- 2.舉例:假設這片玉米地有 N 根玉米，拒掉前面 k 支玉米，無論那些多大，從 k+1 開始，只要看到比前面大的就要毫不猶豫選擇。因此 k 的值非常重要，若太小達不到測試的效果，太大則導致真正可以選擇的不多。
- 3.P(k)=$\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{n}=\frac{k}{n}*\frac{1}{i-1}\ \sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i-1}$

用 x 表示 k/n 的值，並假設 n 夠大，則公式可以寫成

P(k)= $x\int_{-x}^{1}\frac{1}{t}dt$=-$x$*ln x， x*的最優值為*$\frac{1}{e}\approx 0.37$，因此稱為 37 法則

參考資料:37 法則 MBA 智庫百科

參、參考資料

參考資料: 擇你一個命中註定—談經典相親問題與其延伸解

參考資料：麥穗理論─如何選擇人生中最大的那支麥穗？

參考資料:秘書問題 維基百科

參考資料:37 法則 MBA 智庫百科