



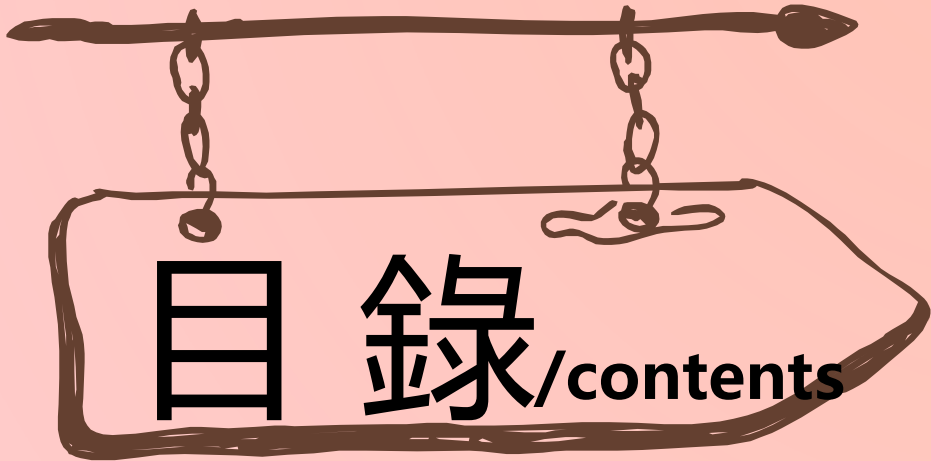
最優終止法則

(Optimal Stopping Rule)

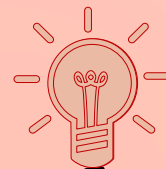
第03組: 410731248曾漪湏 411031102戴世勳

411031103潘柏銓 411031107林亮辰

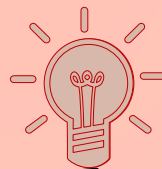
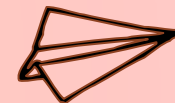
411031113黃俊穎 411031123李柔樺



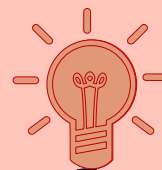
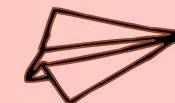
目錄/contents



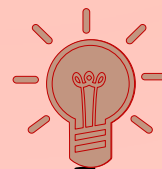
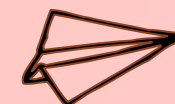
1. 靈感來源之選購樂器



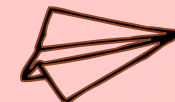
2. 最佳終止法則



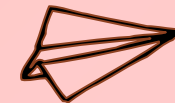
3. 秘書問題

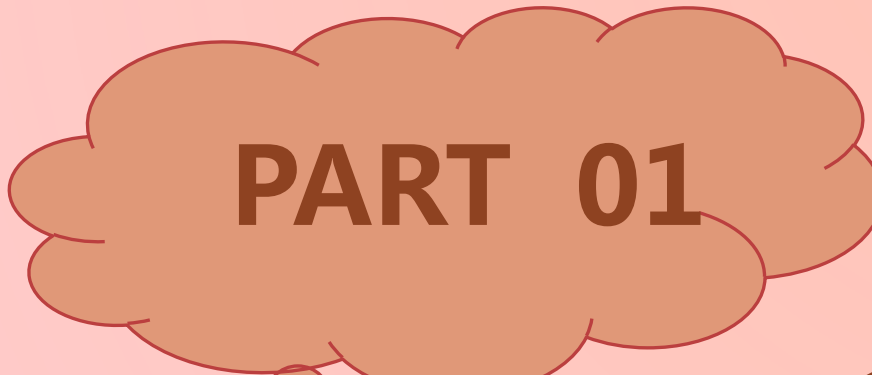
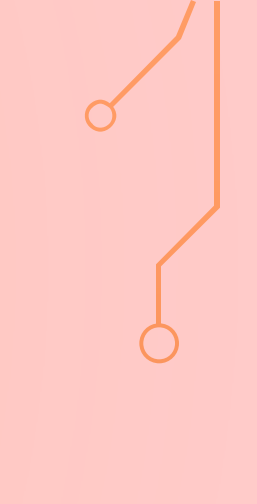
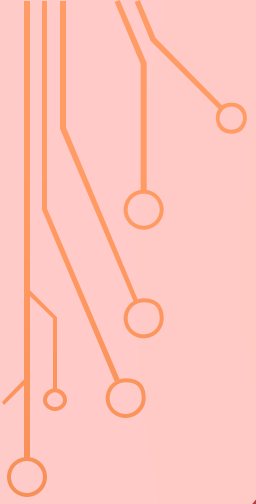


4. 愛情數學

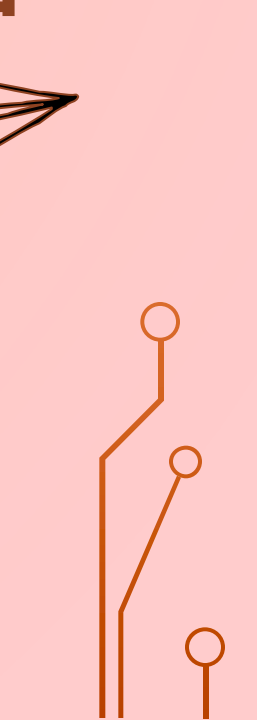
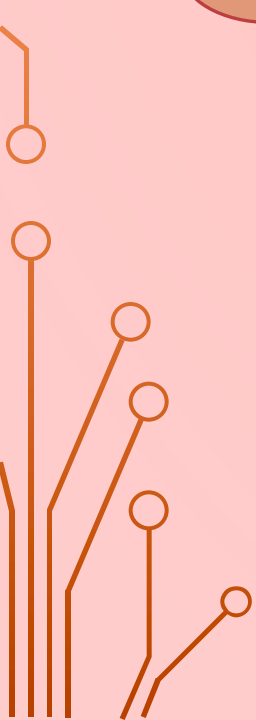


5. 37 法則





PART 01



1 靈感來源之選購樂器



靈感來源

- 最初想到製作最優終止法則這項問題是因為數學史課程有接觸到，與組員們溝通過後，大家也都對這項主題有很高的興趣，透過上網搜尋，我們發現此法則可以運用在很多生活例子上，甚至有美國數學家用這個法則出了一本愛情數學的書，希望同學們聽完能用數學解決部分的選擇困難症，那就開始我們的課程吧...

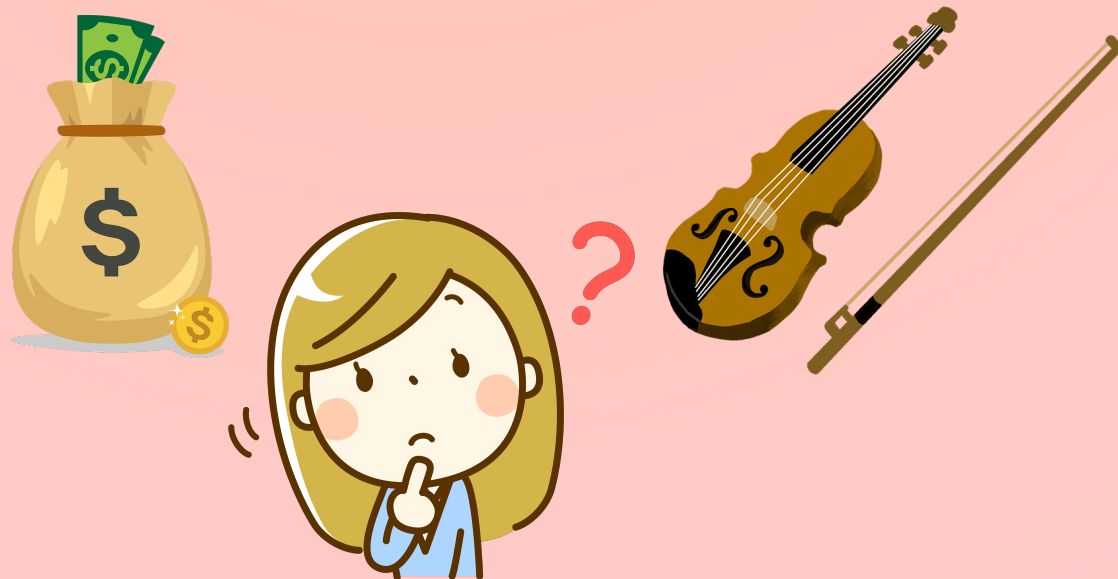


故事背景



如何選購二手音響器材?

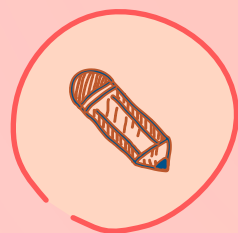
- 某無線電月刊，差不多每期都有一份出讓二手音響器材的廣告。對每一部出讓的音響器材，你可以根據它的年份、牌子、狀態來估計它的合理價錢。通常，這個你認為是合理的價錢不一定等於真正的售價。為了看看購買這部二手音響器材有沒有划算?你可以計算它的超值率 E 。



超值率 E

如何選購二手音響器材?

- 超值 = 合理價錢 - 售價
- 超值率 $E = [(合理價錢 - 售價) / (售價)] 100\%$



例1:

一部二手音響器材售**1000**元，你估計它應該值**1200**元，這部二手音響器材的超值是**200**元，而它的超值率是**20%**

例2:

同上題，但這次你估計它應該值**900**元，這部二手音響器材的超值是**-100**元，而它的超值率是**-10%**

發現問題



如何選購二手音響器材?

- 假定你計劃由1月至12月這年內購買一部二手音響器材，怎樣辦才可以選購到最高超值率的一部呢?



最理想方式 

如何選購二手音響器材?

- 等到年底，然後把十二個月來在廣告上出現過的二手音響器材比較一番，看看哪部超值率最高便買那部

BUT

- 等到年底才作出決定有可能太遲了，你心目中想買的一部，可能早已沽出!

最優終止法則

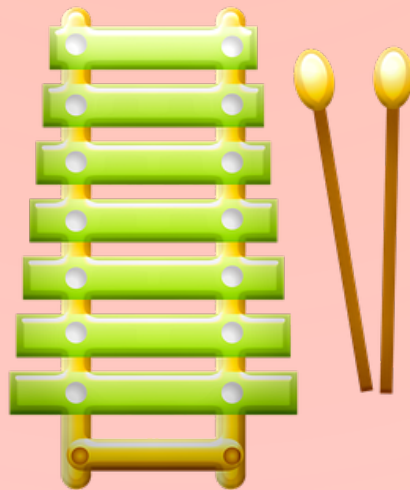
如何選購二手音響器材?

- 為便於說明起見，我們把問題簡化，時間由 12 個月縮短為3個月，即要求在三個月內選購一部二手音響器材：



A

>



B

>



C

最優終止法則

如何選購二手音響器材?

- 按照以下方式選購↓
- 一定不買一月那部，如果二月那部的超值率較一月那部的超值率高，便買二月那部，否則便買三月那部

可能次序	概率	購買月份	購買的二手樂器
ABC	1/6	三月	C
ACB	1/6	三月	B
BAC	1/6	二月	A
BCA	1/6	三月	A
CAB	1/6	二月	A
CBA	1/6	二月	B

發現結論



如何選購二手音響器材?

- (甲)三個月中任意購買，買到最高超值率的一部的概率是 $\frac{1}{3}$
- (乙)利用最優終止法則買到最高超值率的一部的概率是 $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

利用最優終止法則買到最高超值率那一部的概率大大提高了!!!

思考一下

如何選購二手音響器材?

- 題目增加到4個月，我該從何時終止?



四個月怎麼買

如何選購二手音響器材?

- ①一月一定不買，二三月依序跟一月比，超值率有高於前者的買下，否則就買四月。
- ②一月一定不買，二月跟一月比，二月較高則買; 一月較高則不買，但是把較高月刪除。
- ③一二月一定不買，三月跟一二月比，超值率有高於前者就買下，否則就買四月。

方法 ① ② 比較

如何選購二手音響器材?

可能 次序	方法 一	方法 二
ABCD	D	D
ABDC	C	C
ACBD	D	B
ACDB	B	B
ADBC	C	B
ADCB	B	C

可能 次序	方法 一	方法 二
BACD	A	A
BADC	A	A
BCAD	A	A
BCDA	A	A
BDAC	A	A
BDCA	A	C

可能 次序	方法 一	方法 二
CABD	A	A
CADB	A	A
CBAD	B	B
CBDA	B	B
CDAB	A	A
CDBA	B	B

可能 次序	方法 一	方法 二
DABC	A	A
DACB	A	A
DBAC	B	B
DBCA	B	B
DCAB	C	C
DCBA	C	C

發現結論



如何選購二手音響器材?

- ①一月一定不買，二三月依序跟一月比，超值率有高於前者的買下，否則就買四月。此法買到最高超值率的一部的概率是**0.46**；買到最低超值率的一部的概率是**0.08**
- ②一月一定不買，二月跟一月比，二月較高則買；一月較高則不買，但是把較高月刪除。此法買到最高超值率的一部的概率是**0.42**；買到最低超值率的一部的概率是**0.04**

同樣是最優終止法則，且終止時間相同，
但篩選方式不同，交易結果也會不同。勝負難定!!

方法 ① ③ 比較

如何選購二手音響器材?

可能 次序	方法 一	方法 三
ABCD	D	D
ABDC	C	C
ACBD	D	D
ACDB	B	B
ADBC	C	C
ADCB	B	B

可能 次序	方法 一	方法 三
BACD	A	D
BADC	A	C
BCAD	A	A
BCDA	A	A
BDAC	A	A
BDCA	A	A

可能 次序	方法 一	方法 三
CABD	A	D
CADB	A	B
CBAD	B	A
CBDA	B	A
CDAB	A	A
CDBA	B	B

可能 次序	方法 一	方法 三
DABC	A	C
DACB	A	B
DBAC	B	A
DBCA	B	A
DCAB	C	A
DCBA	C	B

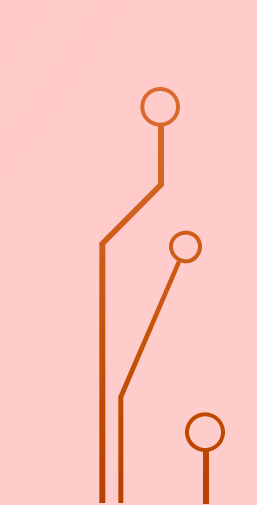
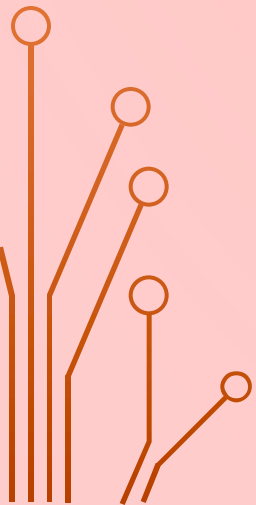
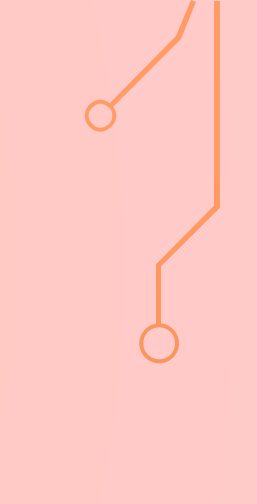
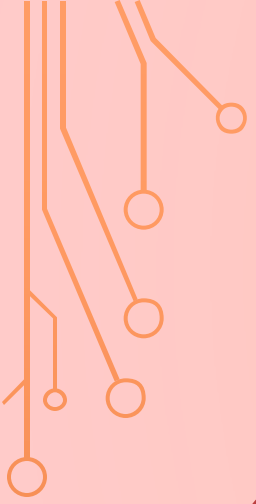
發現結論



如何選購二手音響器材?

- ①一月一定不買，二三月依序跟一月比，超值率有高於前者的買下，否則就買四月。此法買到最高超值率的一部的概率是**0.46**；買到最低超值率的一部的概率是**0.08**
- ③一二月一定不買，三月跟一二月比，超值率有高於前者就買下，否則就買四月。此法買到最高超值率的一部的概率是**0.42**；買到最低超值率的一部的概率是**0.17**

同樣是最優終止法則，但終止時間不同，
交易結果也會不同。後面會有我們組員介紹最好的
終止界線。



PART 02

2 最佳終止法則



最佳終止法則

- 在概論及博弈論上，秘書問題（Secretary problem），類似的名稱有相親問題、止步問題、見好就收問題、蘇丹的嫁妝問題、挑剔的求婚者問題等，屬於最佳終止法則。

最佳終止法則

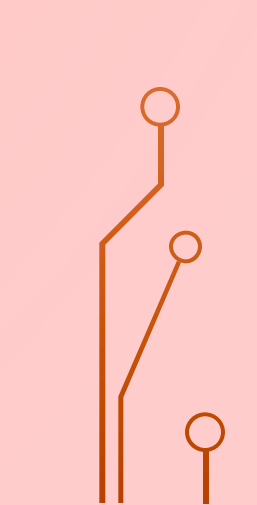
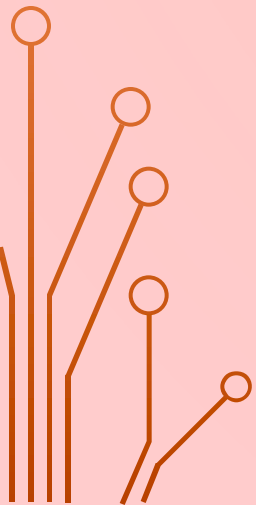
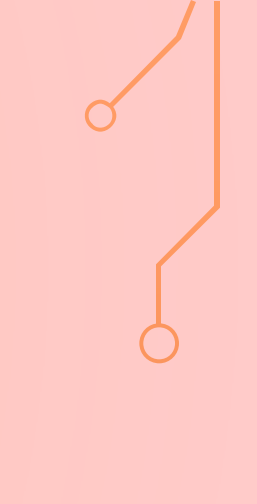
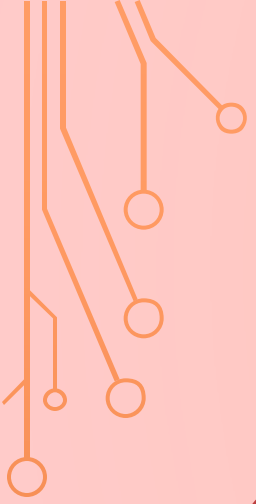
- 若要論起相親問題最早的雛型，基本可溯源到 **1611 年** 歷史上發生的一件趣事。當時遠近馳名的**天文學家克卜勒 (Kepler)**，在一次傷寒的意外中失去了他摯愛的妻子，隨著妻子的離去，獨留下來的克卜勒為了照顧孩子、打理家務，打算再娶一位新的老婆來幫忙。
- 那時他一共找了 **11 位候選人** 來當他的對象，希望在這裡面能遇到符合他期待的女子，接下來他要做的就是——與他們會面，並且從中找出他最對上眼的。
- 於是他開始逐次與這些女子相處，身為一個科學家，他也不免俗嚴謹地將對女子的評價一一記錄下來，當他相處到**第四位**女子時，他覺得自己已經找到了真愛，可以停止繼續會面下一個對象了。
- 雖然他到最後還是決定跟剩下的女子再約過一輪會，並且選中其中的**第五位**女子，但他這種情境的問題，到了**二十世紀中葉**，開始廣泛為人討論。

麥穗理論

兩千五百年前，三個學生問蘇格拉底一個問題：「怎樣才能找到理想的人生伴侶？」蘇格拉底帶著學生來到一片麥田前，並對他們說：「請你們走進麥田，一直往前不要回頭，途中摘下一支最大的麥穗，只能摘一支。」

麥 穗 理 論

用三分之一的時間觀察，用三分之一的時間驗證這個觀察，得出「最基本的滿意標準」，然後在最後一個三分之一的時間裡，選擇第一個好於這個標準的，並不再尋找最優方案。



PART 03

3 秘 書 問 題



秘書問題

- 內容是這樣的：要聘請一名秘書，有 n 個應聘者。每次面試一人，面試後就要及時決定是否聘他，如果當時決定不聘他，他便不會回來。面試後總能清楚了解應聘者的合適程度，並能和之前的每個人做比較。問什麼樣的策略，才使最佳人選被選中的概率最大。

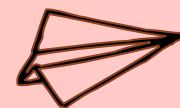
秘書問題

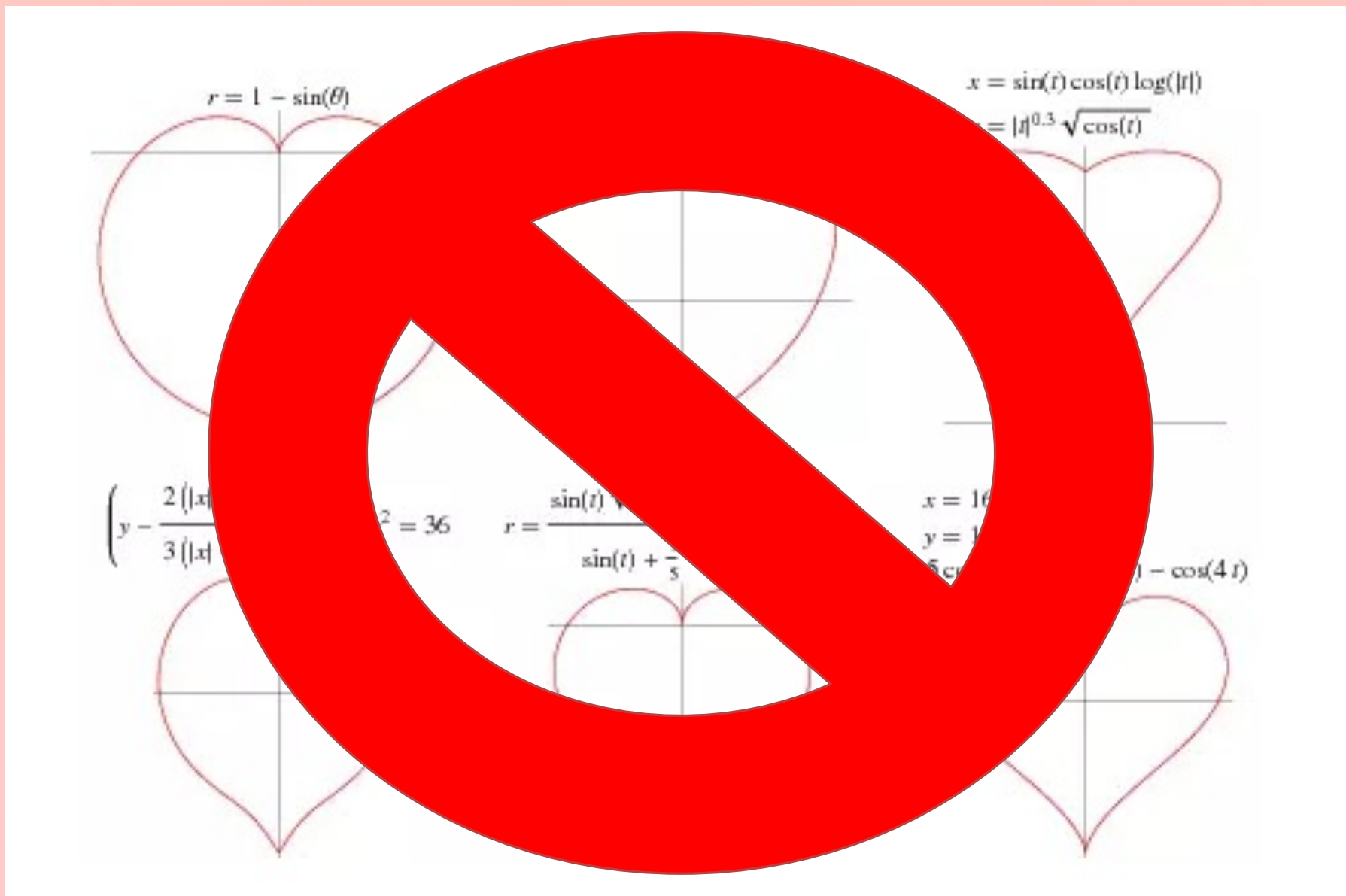
- 求和符號內概率的計算是基於：如果應聘者 i 是（所有應聘者中的）最佳人選，他被選中若且唯若頭 $i - 1$ 個應聘者中的最佳人選處在頭 $r - 1$ 個被拒絕的應聘者中。令 n 趨近無窮大，把 x 表示為 r/n 的極限，令 t 為 i/n ， dt 為 $1/n$ ，總和可以近似為如下積分：
- $P(x) = x \int_x^1 (1/t) dt = -x \ln(x)$
- 令 $P(x)$ 對 x 的導數為 0，解出 x ，我們得到最優的 x 等於 $1/e$ 。從而，當 n 增大時，最優截斷值趨近於 n/e 最佳人選被選中的概率為 $1/e$ 。
- 對於較小的 n 值，最優的 r 也可以通過動態歸化方法得到。

PART 04

4

愛情數學







國立中央大學

男友名字不要再被一聲四聲二聲的

梗圖 · 12月



若你的約會對象有 N 個選擇
當你審視過 r 個約會對象後

$$\begin{aligned} P(r) &= \sum_{i=1}^n P(\text{applicant } i \text{ is selected} \cap \text{applicant } i \text{ is the best}) \\ &= \sum_{i=1}^n P(\text{applicant } i \text{ is selected} | \text{applicant } i \text{ is the best}) \times P(\text{applicant } i \text{ is the best}) \\ &= \left[\sum_{i=1}^{r-1} 0 + \sum_{i=r}^n P\left(\begin{array}{c} \text{the best of the first } i-1 \text{ applicants} \\ \text{is in the first } r-1 \text{ applicants} \end{array} \middle| \text{applicant } i \text{ is the best} \right) \right] \times \frac{1}{n} \\ &= \sum_{i=r}^n \frac{r-1}{i-1} \times \frac{1}{n} = \frac{r-1}{n} \sum_{i=r}^n \frac{1}{i-1}. \end{aligned}$$

$$P(x) = x \int_x^1 \frac{1}{t} dt = -x \ln(x)$$

$\Rightarrow P$ 的最佳值在 $x = \frac{1}{e}$ 的時候出現

$$\frac{1}{e} \doteq 0.3679$$

PART 05

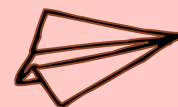
5

3

7

法

則



37法則

- 1.經過數學家歐拉的實驗，以37%作為分界點，前面的時間用來觀察，後面的時間用來做決策的一種方法。
- 2.舉例:假設這片玉米地有N根玉米，拒掉前面k支玉米，無論那些多大，從k+1開始，只要看到比前面大的就要毫不猶豫選擇。因此k的值非常重要，若太小達不到測試的效果，太大則導致真正可以選擇的不多。
- 3. $P(k) = \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{n} = \frac{k}{n} * \frac{1}{i-1} \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i-1}$

用x表示k/n的值，並假設n夠大，則公式可以寫成

$$P(k) = x \int_{-x}^1 \frac{1}{t} dt = -x * \ln x, \quad x \text{ 的最優值為 } \frac{1}{e} \approx 0.37, \text{ 因此稱為37法則}$$