魔術方塊
四面還原的數學原理（第四組）

411031115 數一甲 蘇勇齊

411031105 數一甲 梁順維

410931144 數二甲 藍立翔

410931217 數二乙 林宜加

410831108 數三甲 黃暐傑

410831222 數三乙 許光碩

目錄

- 簡介
- 魔方歷史
- 上帝的數字
- 對稱性
- 排列組合
- 魔方群論
- 解魔術方塊

簡介

- 魔術方塊牽扯到的數學有代數、群論、數論，不只是用數學的角度來分析魔方，更用它來做數學的教學。判斷公式和推理方塊後面的排列都是在發揮腦中的數學思維，所以除了得到成就感、追求自己的突破之外，魔方還幫助玩家增進數學思考的能力。最早是一位叫Rubik的教授為了幫助學生們認識空間立方體的組成和結構以及鍛鍊學生的空間思維能力和記憶力，設計了一個立方體切割的實驗，這就是魔方最早的概念雛形。剩下的我們在之後的報告會再跟各位介紹。

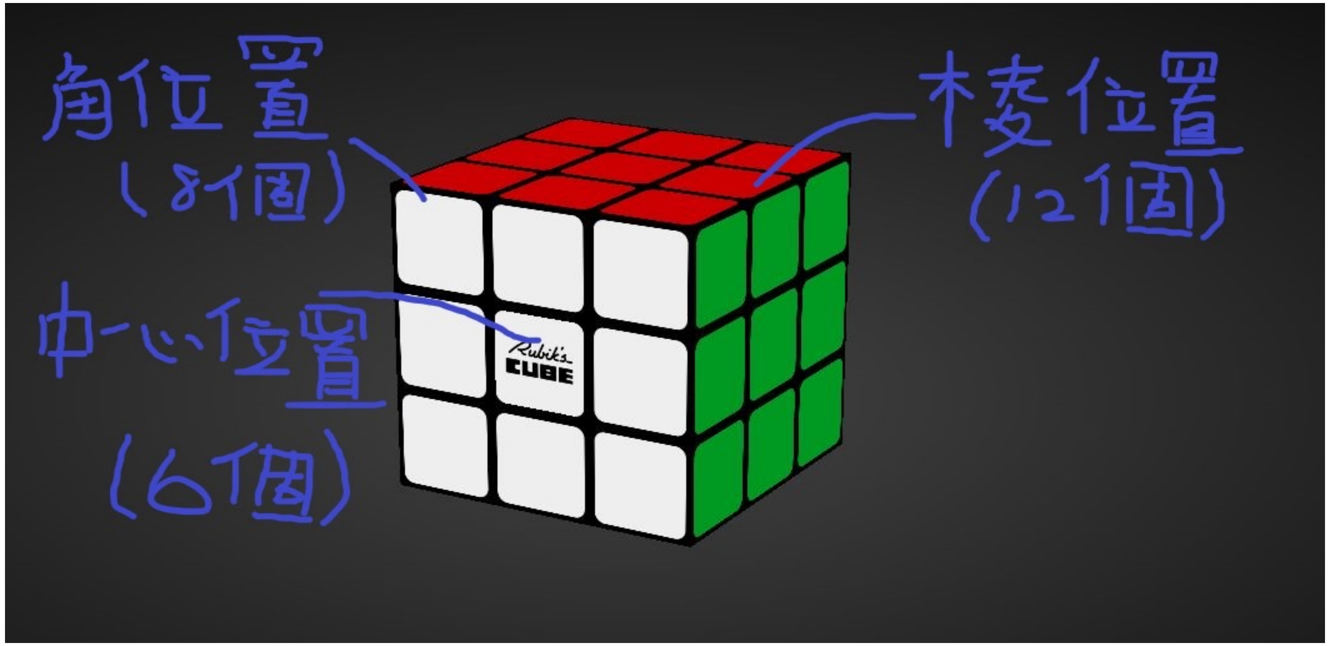
魔術方塊的歷史

- 魔方Rubik's Cube又叫魔術方塊，也稱Rubik方塊。起源最早的魔方是匈牙利的一位叫Rubik的教授於1974年發明的，但是這位教授發明他並不是為了投入生產和娛樂。
- 因為他是建築學教授，為了幫助學生們認識空間立方體的組成和結構以及鍛鍊學生的空間思考能力和記憶力，Rubik教授設計了一個立方體切割的實驗，這就是魔方最早的概念雛形。
- 他在這個概念的基礎上，想製作出一個輔助教學的教具，他用了6周的時間設計出了一個可以上下左右旋轉並且交叉換位的3*3*3正立方體結構，製作出這個教具後，Rubik教授在其6個外表面塗以6種不同的顏色，魔方就此誕生。

魔術方塊
解法的範圍

- 三街魔術方塊的總變化數是

$$\frac{8! \times 3^8 \times 12! \times 2^{12}}{2 \times 2 \times 3} = 43,252,003,274,489,856,000 \approx 4.33 \times 10^{19}$$



上帝的數字

- 很顯然，任意組合的魔方都能在有限步驟內復原，那麼，問題來了:是否存在復原任意組合魔方所需的最少轉動次數N?如果至多進行N次轉動便可以將任意魔方復原，那這個N具體為多少?這個數字N被稱為上帝的數字，從魔方剛剛流行的1982年便被提了出來。

魔方的對稱性

- 對稱性在我們日常生活中是容易理解也經常使用的概念
  但事實上，
  對稱性並不僅止於如你現在腦袋中所想到的
  兩兩對稱或兩側對稱這麼簡單，
  只要著眼於我們的世界經過哪些運算之後，
  用來描述所有觀測現象的定律都依舊可以保持不變？
  這些都是對稱性囊括的範圍。

魔方的對稱性

- 一幾何圖形Φ 對稱的性質：
- 在某個變換群 G 的作用下，
  Φ 被映射到自身上，這個群稱為對稱群。
- 如果變換群 G 是一條直線，
  那麼幾何圖形 Φ 就是關於直線 G 的對稱圖形。
- 如果變換群 G 是一個點，
  那麼幾何圖形 Φ 就是以點 G 為中心的對稱圖形。

魔方的對稱性

- 以點 G 為中心的對稱圖形 Φ 在平面內繞著 G 旋轉 360°/n（n 是一個整數）後與自身重合，那麼 Φ 有一個 n 階對稱，且 G 稱為其對稱中心。
- 三階正方體魔方具有 2 階、 3 階、 4 階對稱軸，這樣的對稱性是除了球體以外的其他物體所不能比擬的。
- 魔方的還原過程就在於旋轉中魔方色塊位置的交換，對於魔方每層每次的旋轉都是繞著該層中心塊的變換，這樣保持點間距離不變的。

魔方的排列組合

- 由排列組合的原理可知，

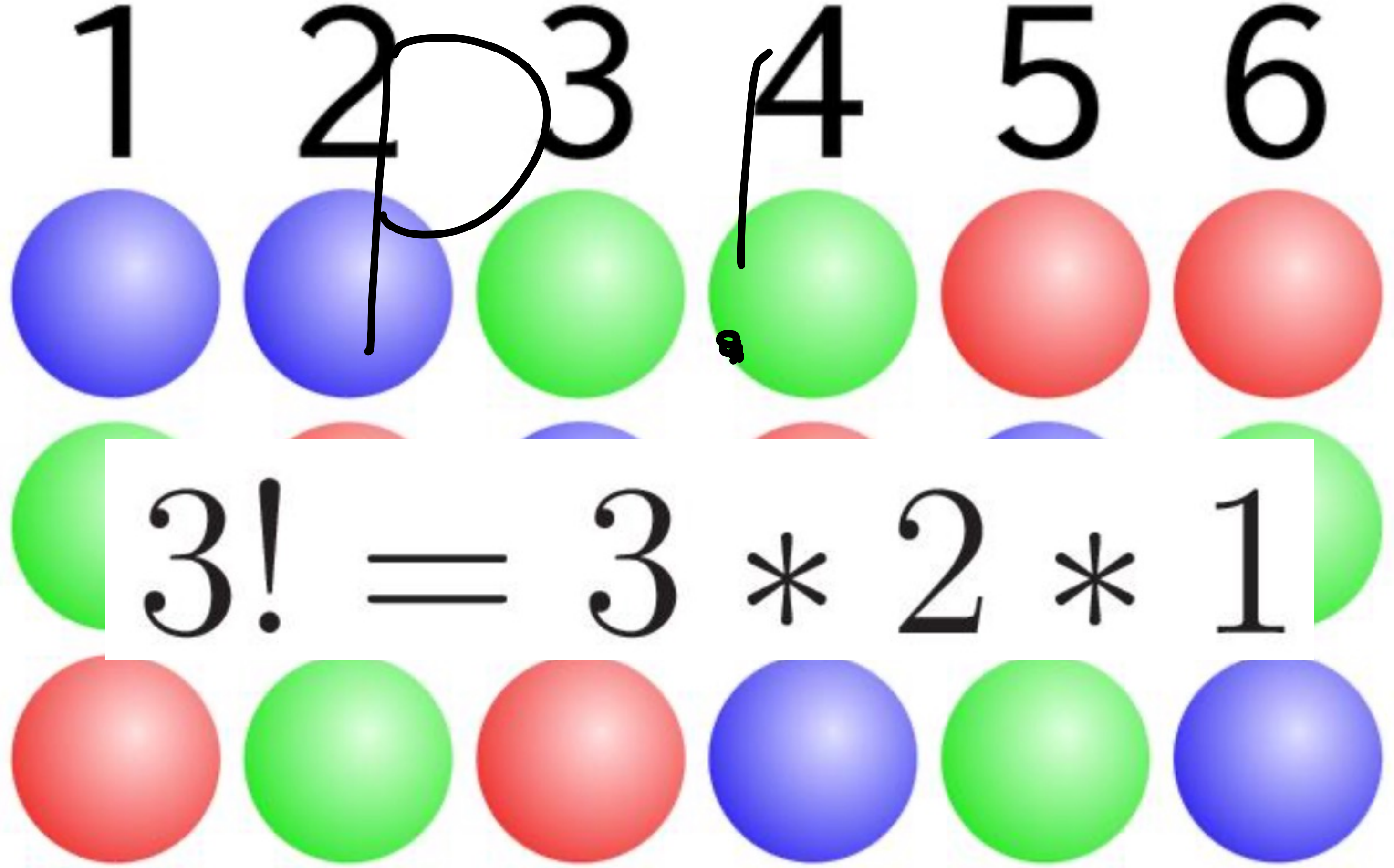
三階魔方共有

$$\frac{8! \times 3^8 \times 12! \times 2^{12}}{2 \times 2 \times 3}$$

種狀態。除去被軸固定的 6 個中心塊外，剩餘 20 個小塊， 8 個角塊放在 8 個角位置，全排列為 8！，每個角塊的三種顏色因為方向的不同又有 3 種方法，因此共有 8！× 38 種排列；同理，12 個棱塊共有12！×212 種排列，但是魔方還原過程中，保持其他小塊不動時，不可以單獨改變一個角塊的朝向，不可以單獨改變一個棱塊的朝向，也不可以單獨交換一對棱塊或一對角塊的位置，因此需要除去 3×2×2 。

什麼是排列組合

什麼是排列組合

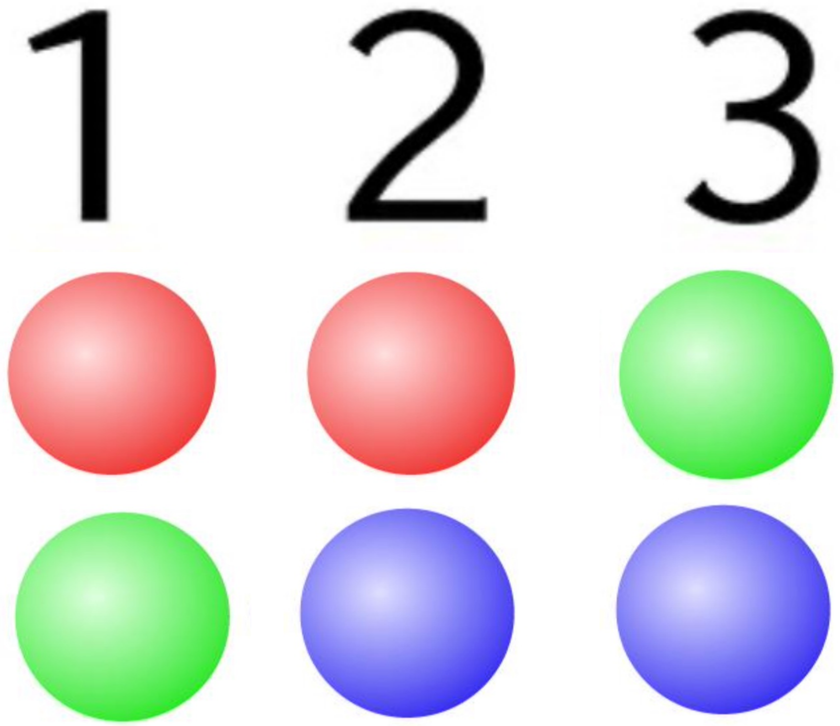


P!

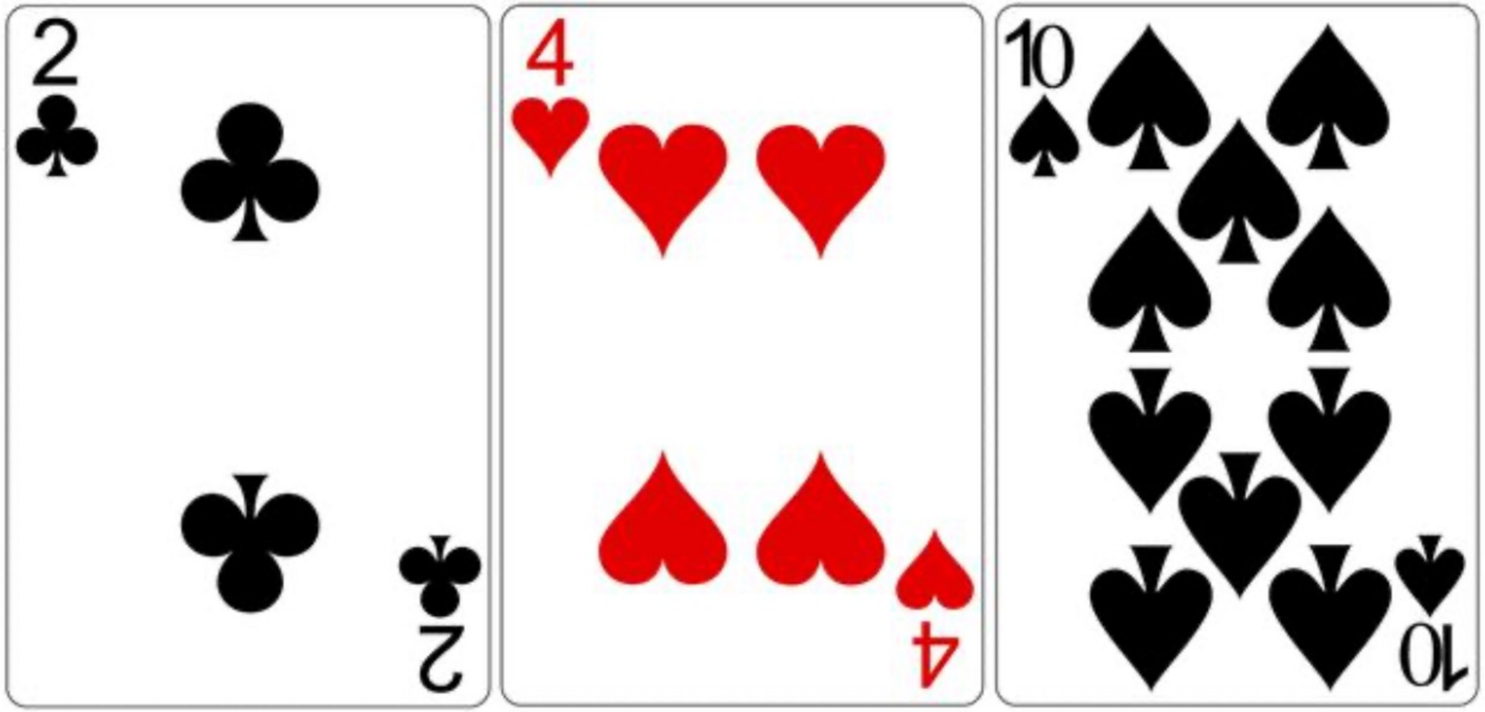
$$3! = 3 * 2 * 1$$

什麼是排列組合

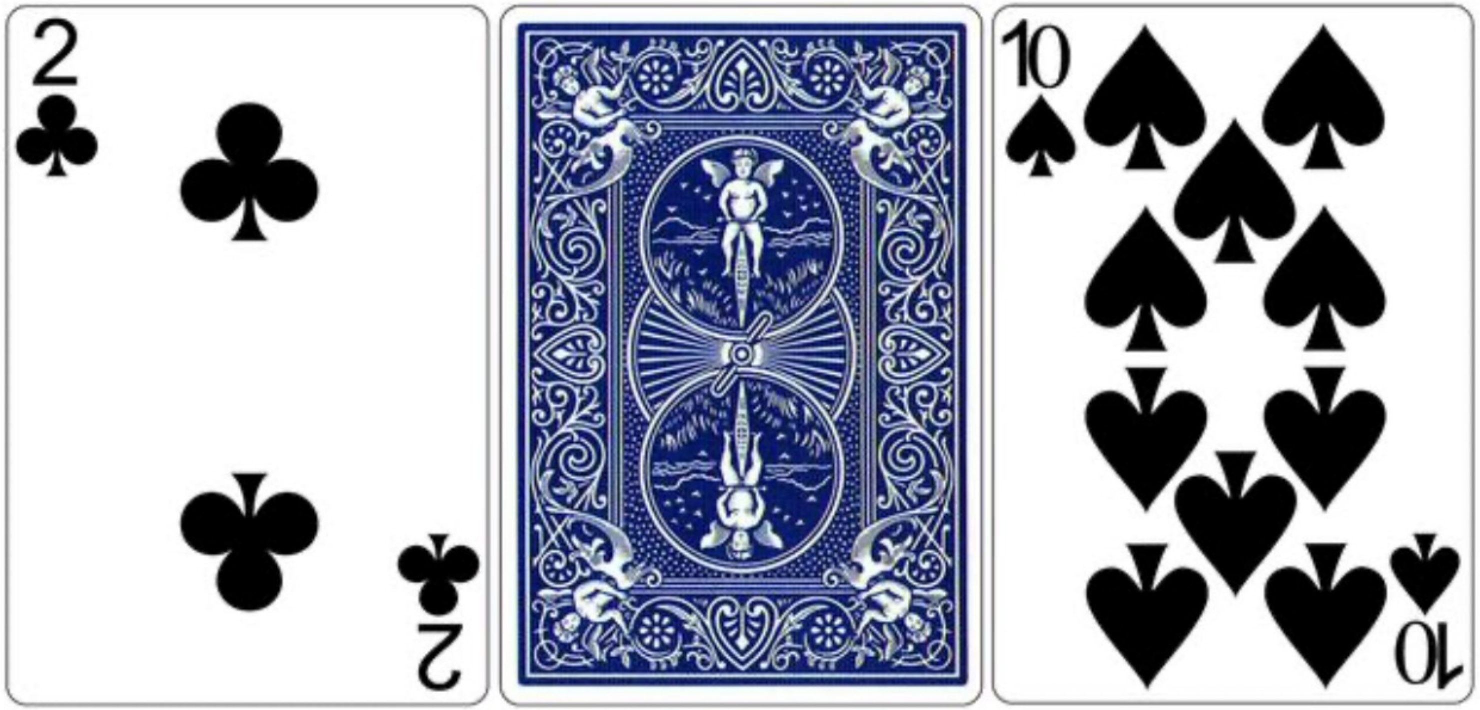
什麼是排列組合



撲克的排列組合



撲克的排列組合



撲克的排列組合

$$2^3 = 2 * 2 * 2 = 8$$

撲克的排列組合

$$3! * 2^3 = 48$$

魔方的排列組合

$$n! * p^n$$

魔方的排列組合

角塊

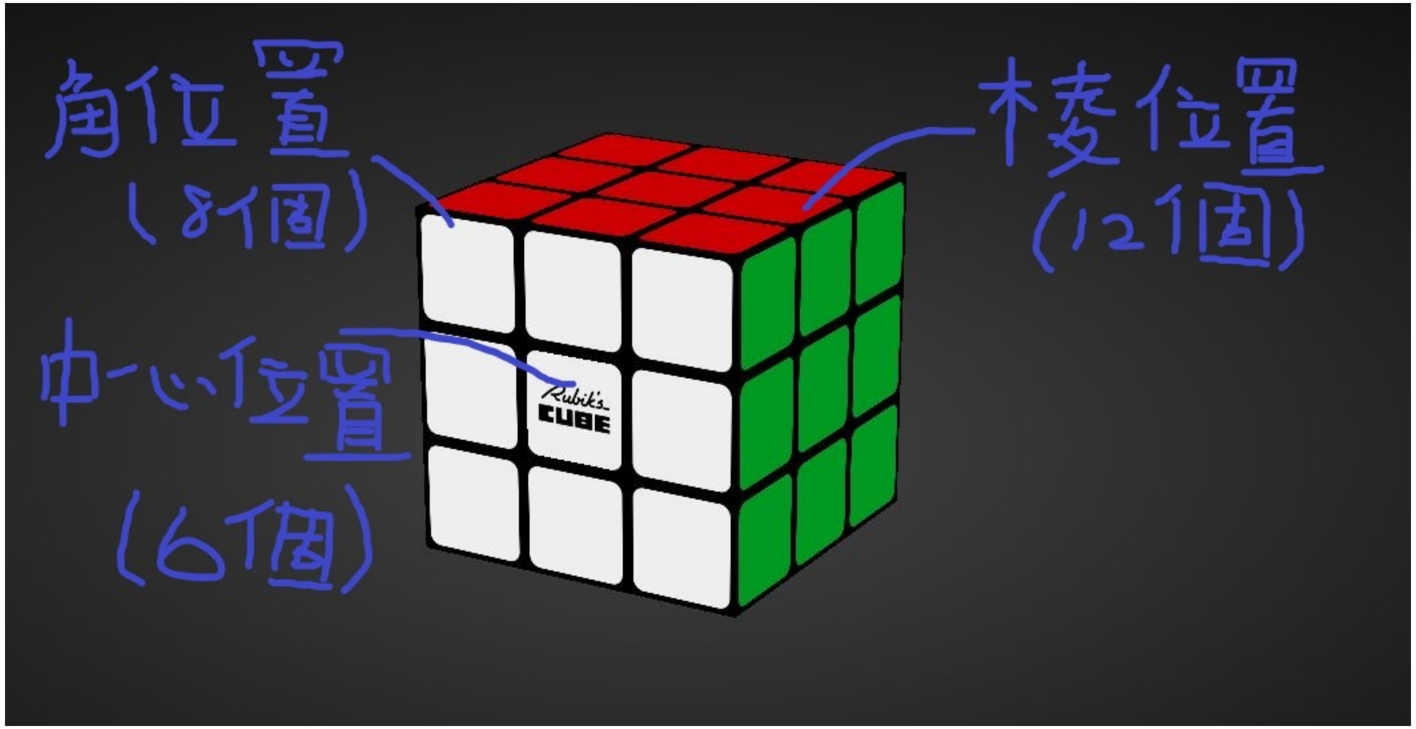
魔方的排列組合

$$7! \cdot 3^7$$

魔方的排列組合

$$n! * p^n$$

$$\frac{\boxed{8! \times 3^8} \times \boxed{12! \times 2^{12}}}{\boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{3}}$$



魔方的排列組合

1 2 3 交換 0 次 偶排列（原排列）

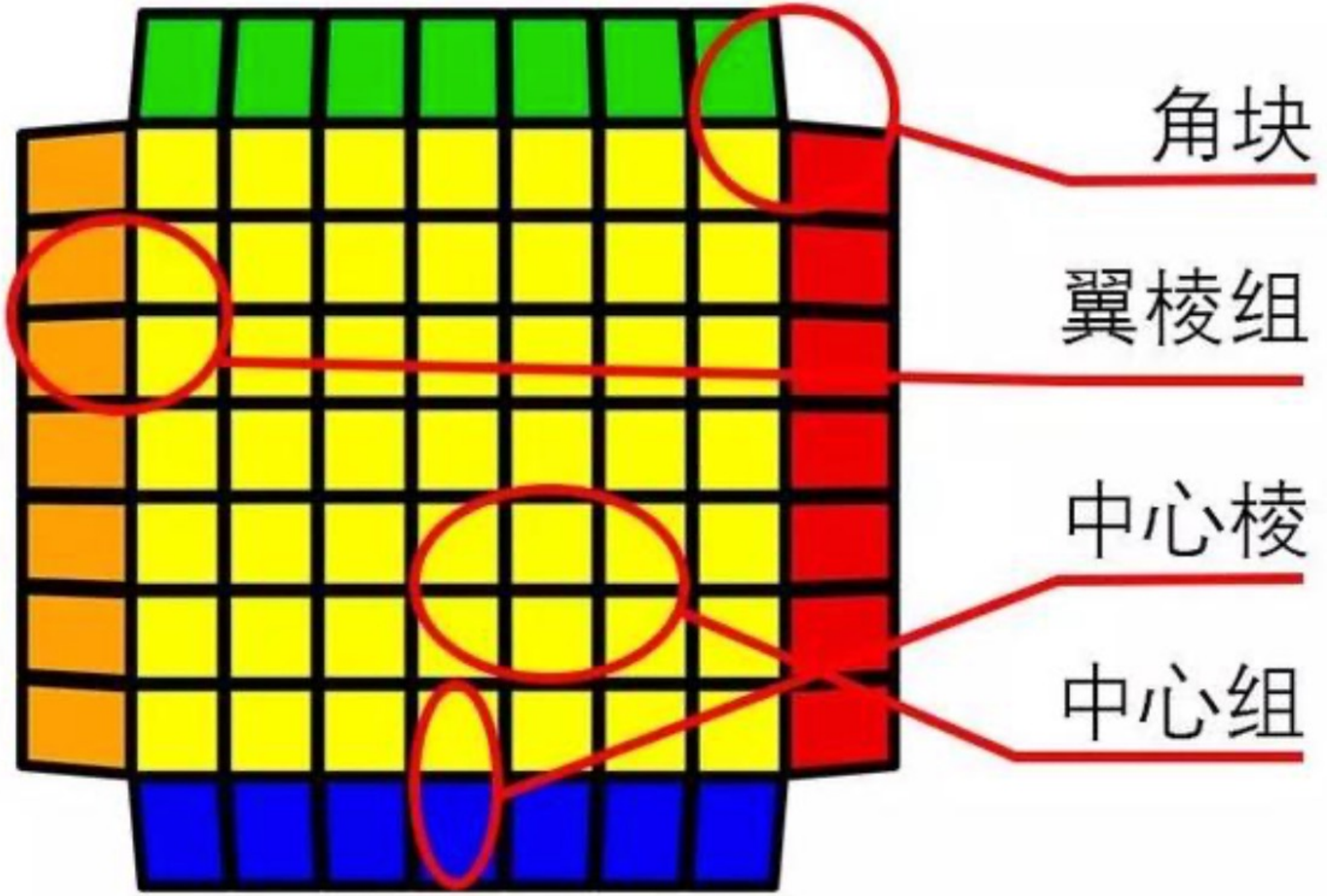
1 3 2 交換 1 次 奇排列

角奇——棱奇 角奇——棱偶 角偶——棱偶 角偶——偶奇

3 1 2 交換 2 次 偶排列

3 2 1 交換 1 次 奇排列

高階魔方的排列組合



高階魔方的排列組合

$$G_{2k}(k \geq 2) = G_2 \cdot \left(\frac{24!}{4!^6}\right)^{(k-1)^2} \cdot (24!)^{k-1}.$$

$$G_{2k+1}(k \geq 2) = G_3 \cdot \left(\frac{24!}{4!^6}\right)^{k(k-1)} \cdot (24!)^{k-1}$$

高階魔方的排列組合

四階：

$$\frac{8! \times 3^7 \times 24!^2}{24^7} \approx 7.40 \times 10^{45}$$

五階：

$$\frac{8! \times 3^7 \times 12! \times 2^{10} \times 24!^3}{24^{12}} \approx 2.83 \times 10^{74}$$

六階：

$$\frac{8! \times 3^7 \times 24!^6}{24^{25}} \approx 1.57 \times 10^{116}$$

七階：

$$\frac{8! \times 3^7 \times 12! \times 2^{10} \times 24!^8}{24^{36}} \approx 1.95 \times 10^{160}$$

八階：

$$\frac{8! \times 3^7 \times 24!^{12}}{24^{55}} \approx 3.52 \times 10^{217}$$

魔方群 (群論)

- 群（group）是由一種集合以及一個二元運算所組成的代數結構，包含四個性質，分別是封閉性、結合律、單位元素和對於集合中所有元素存在反元素。
- 設一群(G,*)
- 封閉性:對設一群於所有的a, b ∈ G 則 a *b ∈ G
- 結合律:對於所有的a, b, c ∈ G

  則 (a*b)*c=a*(b*c).
- 單位元素:在 G 中存在一個元素 e 皆可使得任一元素 g ∈ G，總有等式g*e = e*g = g成立.
- 反元素:對任一元素 g ∈ G，都可在 G 中找到反元素 g' 使得 g*g' = g'*g = e.

魔方群
(群論)

- 單位元素e是獨立存在的
- 如果$a * b = e$, then $a = b^{-1}$(b的反元素)
- 如果 $a * x = b * x$, 則 $a = b$
- (ab) 的反元素是$b^{-1}a^{-1}$

魔方群
(阿貝爾群)

- **阿貝爾群**（Abelian group）也稱爲**交換群**（commutative group）或**可交換群**，它是滿足其元素的運算不依賴於它們的次序（交換律公理）的群。
- 整數集和加法運算 (Z,+) 是阿貝爾群
- a, b ∈ Z，a+b=b+a
- (Z,-)則非阿貝爾群

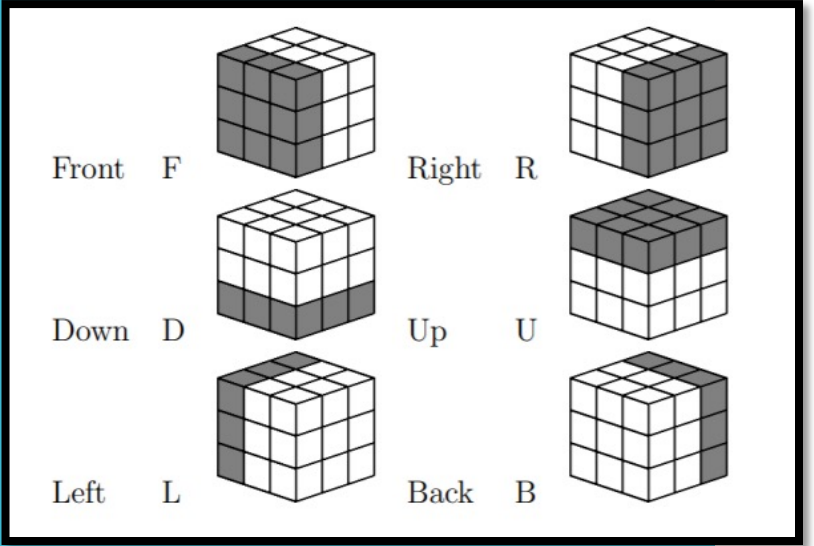
魔方群
(置換群)

- 將現有元素從新排列
- $1, 2, 3, 4$重新排成$1, 3, 2, 4$，也就是23互換位置可將寫成 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 也可以等價的表示為 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 或是 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，其中14位置不變23互換，為求方便寫為（1）（4）（2 3）又或是（2 3）

魔方群
(置換群)

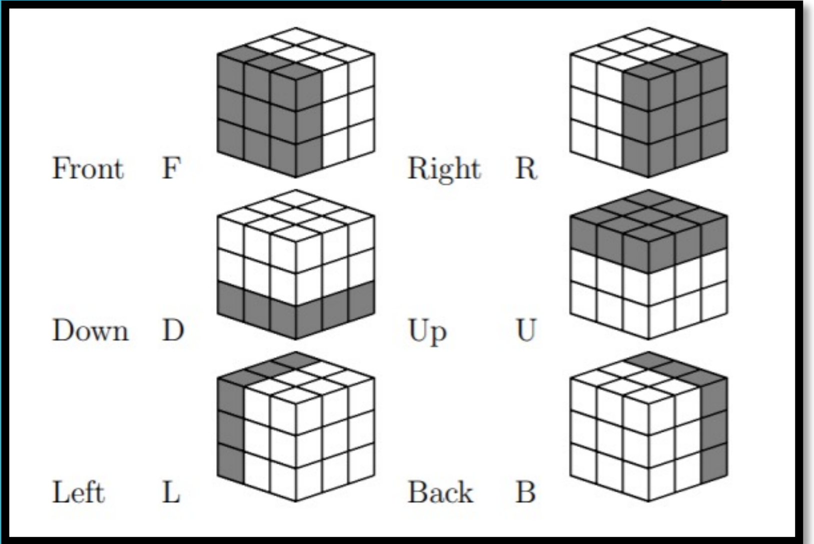
- M是有限集，包含n個元質數，則M的置換群記做Sn
- 集合M={A, B, C,D}
M的一個置換g若為 g(A)=B , g(B)=C , g(D)=A和g(C)=C，可以寫作(A, B, D)(C)，或者更常見的寫作 (A, B, D)，因為C保持不變；若物件有單個字母或數字表示，逗號也被省省去，所以可以記作(ABD)
- S_3={A, B, C}其中(A)為衡等置換，(AB),(AC),(BC)為二皆置換(ABC),(ACB)三皆置換，共6個元素

魔方群



- 前面提到的「*」二元運算，將會表示一系列的魔方動作
- 一個**三皆魔方**包含6個面，每面9個色塊，對魔術方塊的一次操作為將其中的某一個面**順時針旋轉90°**分別**記為{F,D,L,R,U,B}**，以右面為例，逆時針旋轉記為R^3 常簡記為R^{-1}，不進行任何操作則記為**E**，為魔方群的單位元

魔方群

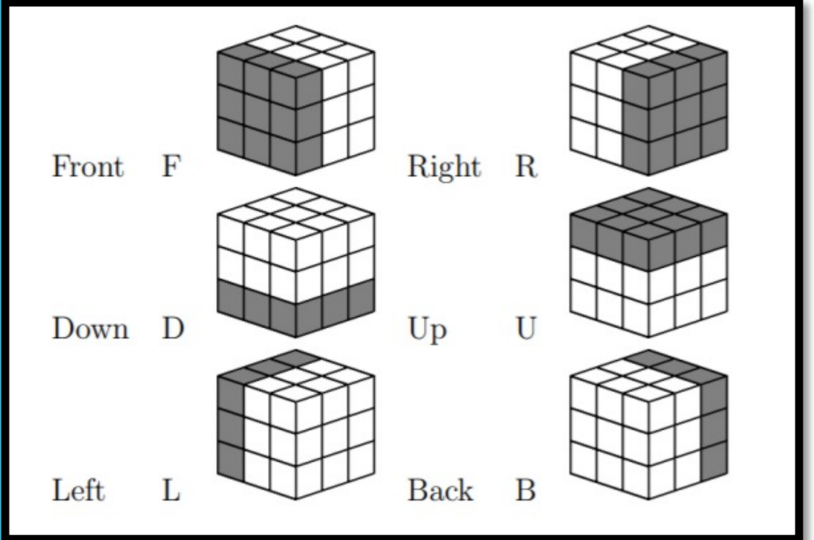


- 例如:先順時針轉前面90度再逆時針旋轉上面180度為F*U^{-2} ，是R的元素之一
- **非阿貝爾群**(交換群)

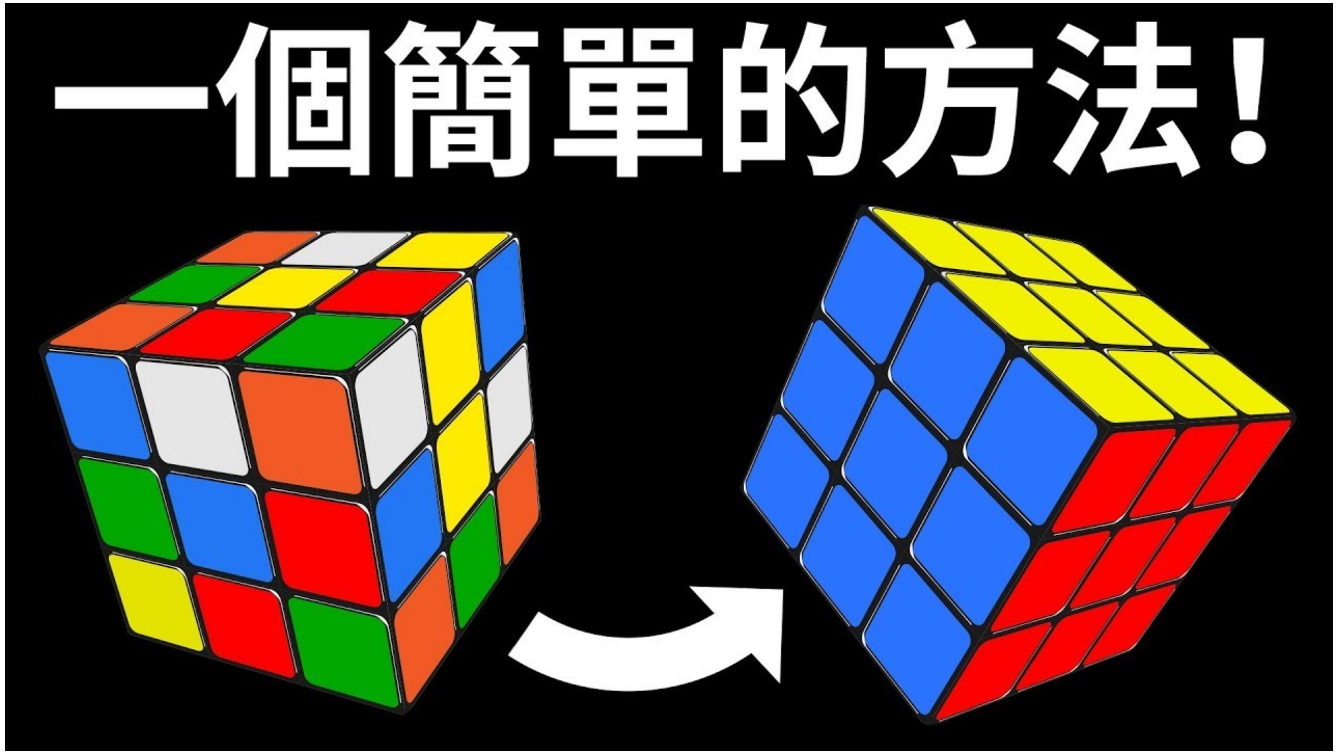
  $F*U^{-2} \neq U^{-2} * F$
- {FFRR}所造成的置換

  (Df Uf)(Dr Ur)(Br Fr Fl)(Rb Rf Lf)(Dbr Ufr Dfl)(Brd Fru Fld)(Rdb Ruf Ldf)(Ulf Urb Drf)(Lfu Rbu Rfd)(Ful Bur Fdr)
- Df表示底面（D）靠近前面（F）的那個小面(facelet)， (Df Uf)表示Df和Uf互換了位置
- 2個二階置換，8個三階置換, 寫作2（2）8（3）

魔方群



- 魔方群與置換群的關係
- 對於一個**3階**標準魔術方塊，除去中心塊外一共有**48個色塊**，因此一個魔術方塊狀態可以由1-48的某種排列表示，但由於魔術方塊本身的幾何結構約束，角塊上的小面不能和棱塊上的小面對調，而魔術方塊的一個操作可以表示成一個置換因此，3階魔術方塊群是**置換群S48的子群**，並滿足和置換群相同的運算規則.



影片介紹: 魔術方塊解法步驟

https://www.youtube.com/watch?v=_gcqF-Uts8o

參考資料

- https://kknews.cc/zh-tw/news/y5xzv5j.html
- https://zhidao.baidu.com/question/560085200.html
- https://www.youtube.com/watch?v=650OtJzyJWY
- https://www.youtube.com/watch?v=_gcqF-Uts80
- https://zh.m.wikipedia.org/wiki/不變量
- https://zh.m.wikipedia.org/wiki/群作用
- https://www.google.com.tw/amp/s/kknews.cc/news/oebb2q5.amp

The end