數學思維與解題—期末報告

第五組

有趣的機率問題

組員:

410731207 趙鴻儒

410731210 張曜巖

410731214 魏玄宇

410731215 陳宥穎

410731241 陳威安

摘要

這學期一開始的幾堂課，老師有跟我們分享幾個有趣的機率題目，我們覺得很有趣，在數學史的課程中也有遇到類似的問題，這種問題既能讓人思考，也相當有趣，十分吸引人。我們先介紹主要的定理，再思考一些有趣的問題，最後再分享實際的例子。

定理：

條件機率

就是事件A在事件B發生的條件下發生的機率。條件機率表示為$P(A \mid B)$，讀作「A在B發生的條件下發生的機率」。

定義：設 A 與 B 為樣本空間 Ω 中的兩個事件，其中$P(B) > 0$。那麼在事件 B 發生的條件下，事件 A 發生的條件機率為：

$$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$$

對於兩個獨立事件A與B

$$P(A \mid B) = P(A)$$

同理

$$P(B \mid A) = P(B)$$

全機率定理

假設 $\left\{B_n : \mathrm{n} = 1, 2, 3, \ldots\right\}$是一個機率空間的有限或者可數無限的分割，且每個集合B_n是一個可測集合，則對任意事件A有全機率公式：

$$P(A) = \sum_n P(A \cap B)$$

又因為

$$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B),$$

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$$

此處$P(A \mid B)$是B發生後A的條件機率，所以全機率公式又可寫作：

$$P(A) = \sum_n P(A \mid B)P(B)$$

問題分享

一、藏有金幣的箱子

故事：

有三個箱子A、B、C各有兩個抽屜，箱子A的兩個抽屜各裝一個金幣，箱子B的兩個抽屜各裝一個銀幣，箱子C的兩個抽屜一個裝金幣一個裝銀幣，今天隨意選一個箱子，然後隨意開一個抽屜,裡面是金幣，而另一個也是金幣的機率是多少？

直覺：

抽屜裡是金幣，所以只可能是A或C，而只有可能是A 才會另一個抽屜裡是金幣，因為抽到A和C的機率相等，所以是1/2。

實際的答案：

把抽屜標上1和2,假設A1、A2、C1放金幣，在B1、B2、C2放銀幣，知道了箱子的一個抽屜裡放金幣，有三種可能

1.選箱子A開抽屜A1

2.選箱子A開抽屜A2

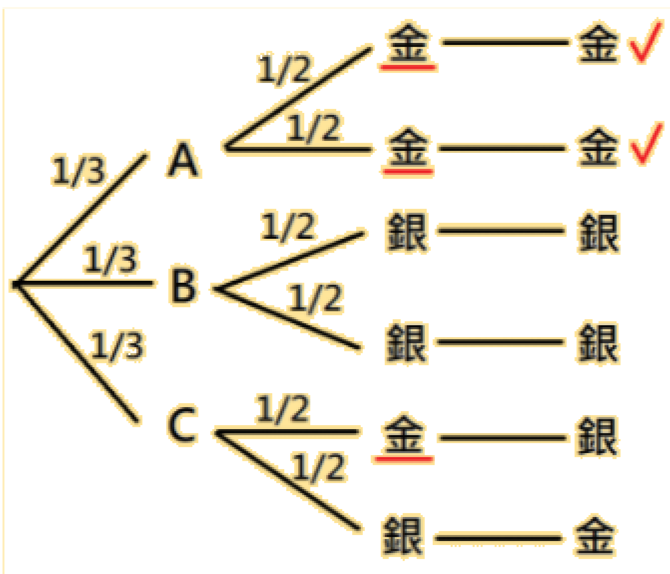
3.選 箱子C開C1

它們發生的可能性是相同的，但其中只有1或2時，另一枚是金幣，所以答案是2/3。

設第一個抽到金幣的事件為D，另一個抽屜為金幣的事件為E

$$P(E \mid D) = (\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2})/(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$$

樹狀圖：



二、是兒子還是女兒

故事:

李先生在車站遇見陳先生，閒談中問及陳先生有幾名子女，陳先生答:「我有兩個孩子。」

李先生接著問:「大的是男孩嗎？」陳先生說：「是的。」

請問陳先生第二個小孩是男的機率有多少?

直覺:

大家第一反應會回答 1/2。答案就是 1/2，但如果李先生並不知道陳先生第一胎是男生他只知道陳先生有兒子的情況下請問這時候第二胎是男生的機率依然是1/2嗎?

只知道有男生:

李先生已知陳先生有兒子的情況下，可能性就只剩男男、男女跟女男，樣本空間的樣本數為3，又第二胎是男孩的可能性就只剩第一跟第三，事件的的樣本數為2，所以機率為 ⅔。

表格:

老大	老二
男	男
男	女
女	男
女	女

條件機率:

A:第二胎是男生

B:陳先生有男孩

$P(A \cap B) = \frac{2}{4}$ (男男、男女、女男、女女)

$P(B) = \frac{3}{4}$

$P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{2}{4}/\frac{3}{4} = \frac{2}{3}$

三、醉酒鬼碰壁

故事：

一名走得左搖右擺的醉酒鬼，在一條窄巷中徘徊。巷子很窄，他向左踏一步便碰着左邊牆壁，向右連踏兩步便碰着右邊牆壁。這名醉酒鬼醉眼昏花，左右不分，他踏出的每一步，向左和向右的機會均等，他碰到左邊牆壁的概率是多少呢？

首先，這名醉酒鬼是遲早要碰壁的，因為要不碰壁，他第一步必須向右，第二步必須向左，第三步又必須向右，如此類推。所以，他要在 N 步內還不碰壁的概率是 $\left(\frac{1}{2}\right)^N$。當N越來越大，這個概率越來越接近零，就是說他遲早要碰壁的。

我們假設他碰到左邊牆壁的概率是 P，碰到右邊牆壁的概率是 1 - P。先考慮醉酒鬼走頭兩步的後果，有三個可能，列表如下。在 C 的情況下，這名醉酒鬼回到原來的地方，但照樣走下去，他還是會碰到左邊牆壁或右邊牆壁，而概率分別是 P 或 1 - P。所以，通過後果 C 而碰左邊牆壁的概率是 P/4，碰右邊牆壁的概率是 (1 - P)/4。因此 P = 1/2+P/4，解方程便得 P=2/3。

	第一步	第二步	後果	概率
A	左		碰左壁	½
B	右	右	碰右壁	¼
C	右	左	回到原地	¼

以上的問題，好像是遊戲文章，不切實際，但事實上它有不少應用。在概率論的發展史上，這是「賭徒破產問題」的一個特例。

四、賭徒破產問題

考慮甲、乙兩人作一連串公平賭局（即每人得勝的概率是1/2），假設每次負方給勝方一元，甲有賭本一元，乙有賭本二元，問甲輸光的概率是多少？

我們把醉酒鬼的每一步看成是賭局的勝負，向左踏步表示乙勝，向右踏步表示甲勝。醉酒鬼左右不分向左或向右踏步的機會均等，代表了賭局是公平的。醉酒鬼距離左邊牆壁一步，碰着左邊牆壁表示甲輸掉一元，也就是輸光了。同樣道理，碰着右邊牆壁表示乙輸掉二元，也就是輸光了。

從以上的計算，便知道甲輸光的概率是2/3。更一般的情況，是假設甲有賭本A元，乙有 賭本 B元，可以證明，甲輸光的概率是B/(A+B)。當B比A大很多時，甲輸光的概率十分接近 1。

例如假定 A是100，B是1000000，那麼甲輸光的概率是=0.9999。在商場上時常出現「大魚吃小魚」的現象，把這句話用在賭場上，來得更貼切呢！

五、該死的獄卒

故事：

監獄裡有三名死囚甲、乙、丙，他們的行刑日正好是國王生日，國王為了表示他的寬宏大量，決定釋放其中一人，但他鄭重吩咐獄卒，絕不能洩漏釋放誰，獄卒一直守口如瓶，但在行刑前一天，獄卒終於忍不住對甲透漏：「乙會被殺」，國王知道後震怒，並責怪獄卒洩漏了機密。

國王認為：

原本甲被釋放的機會是1/3，但你告訴他乙會被殺，就知道是甲或丙其中一人被釋放，甲被釋放的機會便會升為1/2了。

$P(\text{甲})$：甲被釋放的機率

$P(\text{乙})$：乙被釋放的機率

$P(\text{丙})$：丙被釋放的機率

$P(\text{甲})=P(\text{乙})=P(\text{丙})=\frac{1}{3}$

條件機率：

樣本空間S：$\{\text{甲、乙、丙}\}$

A：乙會被殺　A$=\{\text{甲、丙}\}$

B：甲被釋放　B$=\{\text{甲}\}$

$P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A) = P(\text{甲})/(P(\text{甲}) + P(\text{丙})) = \frac{1}{3}/(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$，所以國王認為獄卒該死。

實際上：

國王認為的A：「乙會被殺」，應該要看成C：「獄卒說乙會被殺」

AvsC：A={甲、丙}是對的，但C={甲、丙}是錯的。

因為會產生兩種情況，若丙將被釋放，獄卒必會對甲說乙會被殺；但若是甲將被釋放，獄卒可以選擇說乙或丙會被殺， 不一定是說乙會被殺。

C事件，樣本空間S改為：{甲1、甲2、乙、丙}

甲1表示甲會被釋放而獄卒說乙會被殺，甲2表示甲會被釋放而獄卒說丙

會被殺，乙、丙照舊。

則此時機率為

$P(甲1)\ =\ P(甲2)\ = \frac{1}{6}$

$P(乙)\ =\ P(丙)\ = \frac{1}{3}$

條件機率：

樣本空間S：{甲1、甲2、乙、丙}

C：乙會被殺　C＝{甲1、丙}

B：甲被釋放　B＝{甲1、甲2}

$P(B \mid C)\ =\ P(C \cap B)/P(C)\ =\ P(甲1)/(P(甲1)\ +\ P(丙))\ = \frac{1}{6}/(\frac{1}{6} + \frac{1}{3})\ = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$，與原來機率一樣大，所以獄卒透漏給甲的消息並沒有增加甲被釋放的機率，獄卒不該死。

另一情況：

假如甲問獄卒：「乙會被殺嗎?」，而獄卒又回答了，此時獄卒該死嗎?

此時獄卒回答會

樣本空間S：{甲、丙}

B：甲被釋放　B＝{甲}

$P(B)\ = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$。

此時獄卒回答不會

那甲就一定死$0<1$

在此情形下，不管獄卒回答會或不會，都會影響甲被釋放的機率，所以獄卒只要回答了就該死。

機率應用

一、隨機作答技巧

訪問者進行調查工作時，時常碰到一個困難，就是受訪者不據實回答。 尤其當問及一些比較敏感的問題時，就更加不容易的到真實的答案了。有不少人認為在陌生人面前回答敏感的問題，是很尷尬的一件事。所以 統計學家發明了一套調查訪問技巧，名叫「隨機作答技巧」。

例子：

A先生正在接受訪問，訪問員對他說：「我這裡有兩個問題， 分別是

(甲)月收入是否高於3萬？

(乙)月收入是否低於或等於3萬？

如果你的生日在一～八 月，請回答(甲)，

九~十二月請回答(乙)。」

A先生月入6萬，生日是十月，所以回答問題(乙)，並且答案為「不」。訪問員並不知道他「不」指的是不高於3萬還是不低於3萬，所以A先生作答十分放心。

資料的使用方法：

如果訪問員總共訪問了1000人，有400人回答「不」，600人回答「是」。我們得到「不」占了0.4，這個0.4有什麼用呢?

我們可以利用全機率定理：

$$P(\text{不}) = P(\text{不}\mid\text{甲})P(\text{甲})+P(\text{不}\mid\text{乙})P(\text{乙})$$

假設一個人月收入高於3萬的機率為P，那麼$P(\text{不}\mid\text{甲})$是1-P，$P(\text{不}\mid\text{乙})$是P。

(假設人的出生月份符合離散均勻分配值域Rx：{1，2…~12})

$P(\text{甲})$是$\frac{2}{3}$，$P(\text{乙})$是$\frac{1}{3}$。

帶回上式

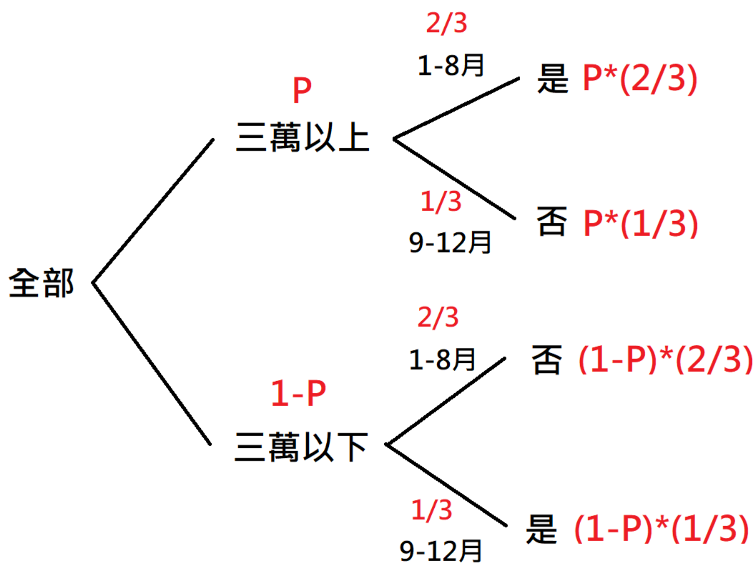
$$0.4 = (1 - P) \times \frac{2}{3} + P \times \frac{1}{3}$$

得到$P = 0.799$…

所以調查結果顯示，差不多有8成的人月收入是高於3萬的。

表格：

生日月份 / 收入 / 問卷回答	1-8月出生 2/3	9-12月出生 1/3
高於3萬 P	是 P*(2/3)	否 P*(1/3)
低於3萬 1-P	否 (1-P)*(2/3)	是 (1-P)*(1/3)



參考資料

1.數學史上課內容

2.維基百科—條件機率

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9D%A1%E4%BB%B6%E6%A6%82%E7%8E%87

3.維基百科—全機率定理
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%A8%E6%A9%9F%E7%8E%87%E5%AE%9A%E7%90%86