數學思維與解題第六組

機率問題-麻將

組員：

411031104 廖英秀

410731104 林政勳

410731107 王霆軒

410731120 許定閎

411031210 馬國凱

目錄

一、研究動機

西方紙牌遊戲流傳數百年，乃至東方出現如紙牌般的麻將出現，不外乎是依靠機率與技巧來決勝，但大眾取向往往是德州撲克、大老二等撲克牌類遊戲，鮮少人對麻將做出評論。而我們發現麻將擁有它獨特的數牌特性，在競技時就是一個特殊的技巧。

二、麻將歷史規則

歷史

麻將牌起源於江蘇太倉，這是蘇州雜文作家"谷新之"研究得出 的結論。
太倉在古時是皇家糧倉, 倉內常年囤積稻穀, 以供「南糧北運」。
之後倉官變鼓勵為獎勵, 發給竹製籌牌記數酬勞。

籌牌上刻有字，可用來當作遊戲的工具；也因此牌子有證券價 值，
於是可以用來作輸贏。這種遊戲流傳下來，演變定型，便成了 「麻雀牌」,
即今天的「麻將」。玩法，術語都與捕捉麻雀有關。

譬如筒、索、萬。筒的圖案是火槍的符號。幾筒表示幾具火槍。
索即束，是細束捆串起來的鳥雀, 所以一索圖案的是鳥, 二索上像竹節，表示鳥雀的腳

萬，即賞錢。另外, 東、西、南、北為風向, 發射時都要考慮到 風。
中，即打中，故塗紅色。白，即白板，打空槍之意。發，即得 賞發財。
「碰」，即「砰」，槍聲。成牌之「胡」,
除此，麻將中的 「吃」,「槓」等術語幾乎都要與捕捉麻雀聯繫起來。
首先，一副完整的台灣麻將總共會有 144 張牌，其中包含有 136 張基本牌以及 8 張花牌+四季牌，136 張的基本牌中，又分別分成筒、條、萬等 3 種花色再加上風牌與三元牌。每位玩家起手都是 16 張麻將，輪到你的時候，你就會先抽一張牌，然後再打掉一張牌，讓手中的牌一直都維持在 16 張的狀態，多於 16 張或少於 16 張都會構成所謂的「相公」，一旦相公，等於該局你一定沒辦法贏得遊戲了。

規則

1.抓位

牌局每圈開始前，會先將東、南、西、北風 4 張牌覆蓋放在桌上，之後 4 家各抽一張牌，再依照所拿之風牌方位決定座位。

2.起莊

牌局開始前由坐東位者先擲出骰子，並按照擲出的點數，由東位開始逆時針計算進而決定出莊家，接著不需要由莊家重新擲骰子，直接由莊家門前開牌即可。

3.開牌

麻將開牌方式為從開門者前面的牌疊右側算起並開始拿牌，例如擲 11 點，即從開門者右側第 12 疊開始拿牌，而拿牌是從莊家開始，依逆時針方向輪流拿牌，每次取 2 疊也就是 4 張牌，直到 4 家皆拿完 16 張牌為止，最後莊家必須再多拿 1 張牌，即稱為『開門』。

4.補花

玩家若拿到花牌，則從莊家為基準依逆時針方向，依次從牌疊後方拿取與花牌相等張數之牌，若是不補牌或補完牌後請喊『過補』或『請補』，以此提示下家進行補牌程序，倘若所補之牌仍然是花牌，則必須等到 4 家都補完後才可再補，而牌局進行時，若摸到花牌者再補進之牌恰巧胡牌，則算（槓上開花）再加 1 台。

在抓位的時候，我們會先從麻將裡挑出「東、南、西、北」各一張，面朝下放在桌上，然後隨機決定一位玩家擲 3 顆骰子，根據擲到的點數決定要由誰率先抽牌。然後根據每個人抽到的牌，來選擇對應的位置坐。

擲到 5、 9、13、17 點，由丟骰者自己開始抽牌。

擲到 6、10、14、18 點，由丟骰者下家開始抽牌。

擲到 3、 7、11、15 點，由丟骰者對家開始抽牌。

擲到 4、 8、12、16 點，由丟骰者上家開始抽牌。

5.摸牌與打牌

在牌局進行的過程中，將不要的牌丟入海底，即稱為『打牌」，當牌打出去後，若並無任何玩家要吃牌或碰牌，則下家就可進行摸牌，此此類推，並反覆依照逆時針順次去循環，直到有玩家胡牌或是流局為止。

6.吃牌

若上家丟出之牌可讓你湊成順子（例如：123 萬），即可『吃牌』，但規則是不能吃下家以及對家所丟出的牌，並且吃進來的牌必須放在順子中間來表示。

7.碰牌

無論是上家、對家抑或下家，只要丟出的牌可讓你湊成刻子（例如：3 張 5 筒），即可「碰牌」。

8.槓牌

倘若玩家手中已有3張相同的牌，此時若再進1張相同的牌，即可進行『槓牌』的動作，接著能再補摸1張牌；而槓牌又分成明槓、暗槓、補槓。

『明槓』:若任意一家打出之牌可讓玩家湊成槓子，即可喊『槓』，此為『明槓』;**『暗槓』**:若本身已有4張相同的牌，也能夠喊『槓』，即為『暗槓』(暗槓是將牌覆蓋在桌面);**『補槓』**:假設玩家手中已經有之前喊『碰』的牌組，此時如果其他玩家再丟相同的牌時，玩家不能喊『槓』，若是自己摸進相同的牌，則可進行『補槓』的動作;『槓牌』後所補的牌若是剛好讓組成自摸胡牌，此種胡牌稱之為（槓上開花），可再多加一台。

9.聽牌

在牌局進行的過程中，只需要再加上第17張牌就達成胡牌條件的狀況，即稱為『聽牌』。

10.胡牌

玩家藉由不斷摸牌、丟牌、吃、碰、槓牌的過程，將手中的牌組合成順子、刻子或槓子，這些每3張或每4張為1組所組合完成的牌，就稱為『面子』；而一副牌必須湊成5組面子外加1對眼牌，才得以胡牌。

若是任一家打出的牌，剛好可以讓自己湊成胡牌型態時，即可喊『胡牌』，而出牌之玩家就稱為『放炮』或『放槍』，此時規則只有算放槍者一人輸。

而倘若胡的牌是玩家自己摸進的，即是俗稱的『自摸』，即為其他3家都算輸。

11.流局

在每次牌局進行到最後時，必須留下8疊（16張）不能摸，而牌局中每槓一次，則需再多留一張加入到不可摸牌的牌疊，而若摸到最後一直沒有人胡牌，就稱為『流局』，倘若流局，則無條件莊家繼續連莊，也稱為『臭莊』。

12.輸贏結算

每一次胡牌，至少可以贏得的基本金額稱為『底』，接著再按照胡牌台型對應不同台數，所贏的額外數目就稱為『台』，在結算輸贏金額時，就是將每底的數目加上總台數乘以每台的數目。(例如：(ABCD) 4人玩的牌局為300底/100台，若C放槍給A，經過結算過後，A贏8台，則A就可從C身上獲得：300 + 100 X 8= 1100元。)

- **莊家台**

1.莊家(1台)：擔任莊者，無論胡牌以及放炮，都多加一台。

- **自摸台**

1.自摸(1台)：自已摸到胡牌所要的牌。

2.門清(1台)：完全沒有（吃、碰、槓），玩家全部16張牌都在自已牌內。

3.連莊拉莊(N台)：莊家若胡牌即可連莊，連1拉1為3台，連2拉2為5台，連3拉3為7台…往後依此類推即可。

4.門清自摸(3台)：門清又自摸。

5.單吊(1台)：只單聽一張牌(含中洞、偏張)。

- **天地胡**

1.天胡(24 台)：莊家在牌局第一輪抓完牌後就立即胡牌。

2.地胡(16 台)：其他三家，在第一輪抓完牌就胡牌。

3.人胡(8 台)：牌局剛開始在第一輪就有人放槍。

- **四喜/三元台**

1.大四喜(16 台)：手牌中有（東、南、西、北）4 組刻子(無論是碰到的，抑或自已摸進來皆算數)。

舉例：(東東東、西西西、南南南、北北北)+(萬、筒、條)所組合的順子與 1 組對子。

2.小四喜(8 台)：手牌中由（東、南、西、北）所組合而成，但其中 1 組只有對子(無論是碰到的，抑或自已摸進來皆算數)。

舉例：(東東東、西西西、南南南、北北)+(萬、筒、條)所組合的順子。

3.大三元(8 台)：手牌中有（中、發、白）所組合的刻子(無論是碰到的，抑或自已摸進來皆算數)。

舉例：(中中中、發發發、白白白)+(萬、筒、條)所組合的順子與 1 組對子。

4.小三元(4 台)：手牌中有（中、發、白）所組合的刻子，但其中 1 組只有對子（無論是碰到的，抑或自已摸進來皆算數)。

舉例：(中中中、發發發、白白)+(萬、筒、條)所組合的順子。

- **暗刻台**

1.五暗刻(8 台)：手牌中有 5 組刻子(包含暗槓)，且不能碰出去，全在自已的牌組內。

舉例：(一萬 x3)+(三筒 x3)+(七條 x3)+(東東東、北北北)

2.四暗刻(5 台)：手牌中有 4 組刻子(包含暗槓)，且不能碰出去，全在自已的牌組內。

舉例：(一萬 x3)+(三筒 x3)+(七條 x3)+(東東東)

3.三暗刻(2 台)：手牌中有 3 組刻子(包含暗槓)，且不能碰出去，全在自已的牌組內。

舉例：(一萬 x3)+(三筒 x3)+(七條 x3)

- **清一色**

1.字一色(18 台)：手牌中由（東、南、西、北、中、發、白）字牌所組成。

舉例：(東東東、西西西、南南南、中中中、發發發、白白)

2.清一色(8 台)：手牌中由同一種花色所組合。

舉例：全萬字、全筒子、全條子。

3.混一色(4 台)：手牌中只有字牌(東南西北)+單一花色(萬、筒、條)。

舉例：(一萬、二萬、三萬)+(八萬 x2)+(東東東、西西西、南南南、中中中)

- **碰碰胡**

1.碰碰胡(4 台)：手牌中全都是對子所組成，且沒有任何的順子，可自已摸進來也可靠碰來的。

2.全求(2 台)：全都是吃或碰，且手中只剩下一張牌，必須是任一家放砲才可算為全求，若是自摸則不算。

3.平胡(2 台)：手牌由 5 組對子與 1 組對子的組合，且必須無字無花，聽雙洞才能算平胡。

- **槓上/海底**

1.槓上開花(1 台)：玩家摸到花牌或槓牌後，透過補牌而胡牌者，多計算 1 台。

2.海底撈月(1 台)：玩家摸到牌局的最後一張牌剛好胡牌，多計算一台。

3.海底撈魚(1 台)：玩家摸到牌局最後一張，且打出去放炮，多計算一台。

- **花槓/搶槓**

1.八仙過海(8 台)：玩家湊齊 8 張花牌(春、夏、秋、冬、梅、蘭、竹、菊)即可胡牌。

2.七搶一(8 台)：玩家湊齊 7 張花牌，當其中一家，拿到最後一張花牌時，即可胡那一家。

3.花槓(1 台)：胡牌時，玩家牌前有 4 張花牌（春、夏、秋、冬）或（梅、蘭、竹、菊)，多計算一台。

4.搶槓(1 台)：當別家喊槓，且恰巧該名玩家補槓的牌是自已所要胡的牌，就可搶槓胡牌(明槓)。

- **圈風台**

1.花牌(1 台)：從開門來計算，『東(春、梅-1 花)、南(夏、蘭-2 花)、西(秋、菊-3 花)、北(冬、竹-4 花)』(順時針計算)。

舉例：假設北家拿到（冬）又拿到（竹)，就可累計成 2 台。

2.圈風台(1 台)：目前是南風圈，拿到南風刻子，多計算一台。

3.門風台(1 台)：依自身的坐風，比方坐東，若拿到東風的刻子，多計算一台

三、數牌特性

(一)關於數牌特性

在麻將規則的定義下，牌種可分成「數牌」及「字牌」二種，字牌為東、南、西、北、中、發、白七種，其餘的則為數牌。

相較於字牌，數牌的變化因其上的數字及麻將本身的規則而產生許多變化。

(二)數牌特性

了解基礎數牌特性可以說是打牌必備的一種技能，它可以算是一種邏輯的推

導。

＊對稱性
首先介紹的是麻將的「對稱性」，對稱性可以說是十分好理解的特性。
對稱性主要在說：「討論牌況時，以數字５為分水嶺，左右對稱。」
透過對稱性，在我們討論牌況時，討論 1 ~ 4 得到的結果亦可套用在 6 ~ 9：1 對稱於 9 、 2 對稱於 8 ....，以此類推。

＊一路性
因為麻將的規則而衍伸出的一種特性，
麻將數牌有三路：「1、4、7」、「2、5、8」、「3、6、9」。
依麻將規則進行時，當手上有「2、3 萬」時，可吃 1、4 萬，這時我們視作 1、4 為同一路，更好的的牌型如「3、4、5、6、7」則更明顯，因為它可吃下 2、5、8，亦為同一路之數字。
這點常可幫助我們判斷敵家所需之牌，假設敵家捨出 4 萬，即可猜測他手上應該沒有 2、3 或 5、6，否則不會捨出 4 ，從此得知他不會要同一路的 1、7。

但這並不是完全，而是機率，捨出 4 並不代表他絕對不要 1 、7，
他有可能有 1、7 對子想碰，也有可能手牌為 4、6、8 捨出 4 而想要 7，俗稱「打四吊七」。
雖然不能完全保證他不要，但至少安全機率上比其他情報未明的牌章要高。
在此我還要闡明一點，若敵家捨出 8 ，則不能保證他不要 5 ，因為手上可能有 3、4 之組合。

故打中間可以顧到二邊，但打旁邊並不能顧到另一側。

＊封閉性

再來談到的是封閉性，也是可以藉由邏輯推導出的性質。
封閉性主要在談論，扣除情況較為特殊的數字「5」，當你手中持有某數字的一刻(三張)牌時：

假設該數字為 7（即持三張 7 ），則 8、9 被需要的機會可以說是大為降低，稱其為封閉性。
原理很簡單，四張 7 中自己抓了三張，需要 8 的搭子可能為「7、9」，7 剩一張，機率較低；
需要 9 的搭子可能為「7、8」，7 僅剩一張，機率亦低；

需要 8 的搭子還有「6、7」雙頭，但原因同上，該雙頭與「7、9」不可能共存。

因為手牌中抓三張，剩下那張 7 只能分配給一個搭子。
故：三張 7 可以封閉 8、9，同理得三張 8 可封閉 9，
但三張 6 僅能封閉 7 、8 而管不到 9 ，因為 7、8 搭子存在的機率並未受到你 6 的影響。

有封閉性的牌通常相較安全，與封閉性相反的則稱開放性，較具危險性。
但請各位不要忽略「對子」的存在，在應用此特性時，也必須考慮到對子。
上述討論的範圍以順子搭為主，雖然封閉性可以封閉順子搭，但封閉不了對子
手中抓三張 3 ，也不能保證 1、2 的對子不存在。
但儘管如此，透過封閉性還是能大幅提高被封閉之牌的安全性，
畢竟它們能被利用的空間於其他牌章相比，已被大幅降低。
舉個實際的例子吧，當你手中抓著二萬對子，且檯面上已出現的二萬有二張，四張皆現

但到了牌局中後期仍不見一萬的蹤影，此時的一萬不但不具有安全性，還可能有些危險。
原因很簡單：照理說一萬被利用的機率實在極低，但為何到後期仍未見到敵家捨出？
最大的可能就是某家握有對子或一崁，此時捨出一萬就會給敵家碰，甚至胡牌了。

＊下壓性

下壓性只適用於「序盤」，也就是牌局之初，約前一到五巡。
何謂下壓性？當敵家在序盤捨出 4，則該敵家不要 1、2、3，
同理，捨出 3 不要 1、2，捨出 2 不要 1（根據對稱性得 6、7、8、9 亦同）。
但捨出 5 則無下壓性可言，因為其位於數字一至九的正中間，較為特殊。
關於下壓性，，是用來判斷敵家要甚麼、不要甚麼的原則之一。

所以才有人說麻將是需要記憶力的遊戲，若到後期才在海內四處觀看以判斷槍牌是不足的。
必須從觀察敵家所捨出的牌章來判斷安全性，下壓性正為這句話作了最好的詮釋。

四、聽牌條件判斷

2017 年，威廉斯堡大學數學系的李志光教授等人發表了一項麻將研究，論文中提出了一套高效率的判斷胡牌演算法，以下版本由筆者修改呈現。

一副牌 P，若把一個對子（俗稱眼睛）拿掉後，假設此時數字最小的牌是 x，若 x 的張數是 3 張以上，則拿掉 3 張 x (一刻)後，剩下牌為 Q

否則拿掉 x, x+1, x+2 (一順)之後，剩下的牌為 Q。(若無法拿，則 P 沒胡)

則「P 胡」若且唯若「 Q 胡」。

五、麻將機率、排列組合與古典機率應用

(一)抓位

一開始會利用 3 顆骰子進行抓位，利用環狀排列得有 3!=6 種座位坐法。

(二)開頭選莊與抓牌

點數	對應座位	次數	機率(取至小數後第二位)
3	對家	1	0.46%
4	上家	3	1.38%
5	莊家(自己)	6	2.77%
6	下家	10	4.62%
7	對家	15	6.94%
8	上家	21	9.72%
9	莊家(自己)	25	11.57%
10	下家	27	12.5%
11	對家	27	12.5%
12	上家	25	11.57%
13	莊家(自己)	21	9.72%
14	下家	15	6.94%
15	對家	10	4.62%
16	上家	6	2.77%
17	莊家(自己)	3	1.38%

18	下家	1	0.46%
總計		216	100%

故可整理成：

Mod4	對應座位	次數	機率
點數≡0	上家	55	25.46%
點數≡1	莊家(自己)	55	25.46%
點數≡2	下家	53	24.54%
點數≡3	對家	53	24.54%

得知骰到自己與自己的上家的機率會更高。

(三)牌型機率

同第三點，威廉斯堡大學數學系的李志光教授利用 python 分析各條件牌型胡牌條件之論文，以下翻譯之：(此論文以香港 13 張麻將為基礎，非台灣 16 張麻將)

In this section, we focus on Mahjong hands of 13 tiles chosen from the 36 dot tiles to study the questions of "Nine Gates", "Eight Gates", etc. We will continue to use the notation

$$X_1, \ldots, X_9$$

to represent the 1-dot, ..., 9-dot tiles each with 4 copies, and denote a hand by a "product" of 13 terms such as

$$X_1X_1X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7X_8X_9X_9X_9, \text{ which may further simplify to } X_1^3X_2X_3X_4X_5X_7X_8X_9^3.$$

We have the following facts about these 36 tiles based on basic combinatorial theory; for example, see [1].

從 36 張牌中取出於手上 13 張牌(只考慮其中一種花色)，並將 1~9 號牌設為 X1~X9，每一號各有 4 張。例如將一組 13 張的牌

$X_1X_1X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7X_8X_9X_9X_9$,記做 $X_1^3X_2X_3X_4X_5X_7X_8X_9^3$. 。

Proposition 3.1. *Consider 36 dot tiles with 4 copies of* $X_1, \ldots, X_9$. *Suppose a 13-dot hand is represented as* $X_1^{n_1} \cdots X_9^{n_9}$ *and associated with a sequence* $(n_1, \ldots, n_9)$ *with* $0 \leq n_j \leq 4$ *for all* j *such that* $n_1 + \cdots + n_9 = 13$.

(a) *The number of ways to choose 13 random tiles from 36 tiles (allowing repeated patterns):*

$$\binom{36}{13} = 2310789600.$$

(b) *The number of ways of getting a certain 13 dot tiles hand with* n_j *copies of* j*-dot tiles for* $j = 1, \ldots, 9$, *so that* $n_1, \ldots, n_9$ *are integers in* $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ *adding up to 13:*

$$\binom{4}{n_1} \cdots \binom{4}{n_9}.$$

(c) *The probability of getting a 13 dot tiles hand with* n_j *copies of* j*-dot tiles:*

$$\frac{\binom{4}{n_1} \cdots \binom{4}{n_9}}{\binom{36}{13}}.$$

So, the probability of getting the hand of nine gates $X_1X_1X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7X_8X_9X_9X_9$ *out of the 36 dot tiles is*

$$\frac{262144}{2310789600} = 0.00011344347.$$

(d) *All possible selections of* m *tiles out of the 36 tiles for* $m = 0, \ldots, 36$, *correspond to the degree* m *terms in the expansion:*

$$(1 + X_1 + X_1^2 + X_1^3 + X_1^4)(1 + X_2 + X_2^2 + X_2^3 + X_2^4) \cdots (1 + X_9 + X_9^2 + X_9^3 + X_9^4)$$

$$= \sum_{0 \leq n_1 + \cdots + n_9 \leq 36} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \ldots X_9^{n_9}$$

In particular, the term with lowest degree $1 = X_1^0 \cdots X_9^0$ *corresponds to the selection of none of the tiles* $X_1 \ldots X_9$, *and the term with highest degree* $X_1^4 \cdots X_9^4$ *corresponds to the selection of all the 36 tiles.*

(e) *The number of different 13-dot hands equals to the total number of summands* $X_1^{n_1} X_2^{n_2} \cdots X_9^{n_9}$ *with* $n_1 + n_2 + \ldots + n_9 = 13$ *in the expansion in* (d), *and equal to coefficient of* X^{13} *in the expansion:*

$$(1 + X + X^2 + X^3 + X^4)^9 = \sum_{i=0}^{36} \alpha_i X^i.$$

We have $\alpha_{13} = 93600$.

(f) *Define the dual of* $X_{j_1}X_{j_2}\cdots X_{j_r}$ *as* $X_{10-j_1}X_{10-j_2}\cdots X_{10-j_r}$. *It is easy to see that the dual of a chow, a pung or a pair is also a chow, a pung or a pair, respectively. Consequently, the adding of* X_j *to the 13-dot hand* $X_1^{n_1}X_2^{n_2}\cdots X_9^{n_9}$ *form a winning hand if and only if adding of* X_{10-j} *form a winning hand of its dual.*

The properties (a) – (e) allow us to set up the Python program to determine the hands of nine gates, eight gates, etc. and compute their probability. Property (f) is of theoretical interest that every single hand of 13 tiles has a dual hand if we replace X_k by X_{10-k}. If the original hand can win with an ℓ-dot tile, then its dual hand can win with $(10-\ell)$-dot tile. So two hands that are dual to each other can win by same number of tiles. For example, $X_1X_1X_1X_1X_2X_2X_2X_2X_3X_3X_3X_4X_5$ and $X_5X_6X_7X_7X_7X_8X_8X_8X_8X_9X_9X_9X_9$ are dual to each other. Adding X_3, X_4 or X_6 to the first hand will yield a winning hand. Accordingly, adding X_7, X_6 or X_4 to the second hand will yield a winning hand. Evidently, the dual hand of the "Nine Gates" is itself.

定理 3.1 考慮 1~9 號牌各 4 張共 36 張牌，假設拿在手中的牌表示成$X_1^{n_1}\cdots X_9^{n_9}$

右上角指數項每位皆大於等於 0；小於等於 9，且合計為 13，即 13 張牌。

(a)從 36 張牌取 13 張牌組合=2310789600

(b) 取出某一特定牌型之組合數為 $\binom{4}{n_1}\cdots\binom{4}{n_9}$，且 n1+…n9=13。

(c) 故每一種牌型的機率為 $\frac{\binom{4}{n_1}\cdots\binom{4}{n_9}}{\binom{36}{13}}$.。

例如：$X_1X_1X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7X_8X_9X_9X_9$ 的機率為 $\frac{262144}{2310789600}=0.00011344347.$。

(d)從 36 張牌選出 m 張牌的組合型態為：

$$(1+X_1+X_1^2+X_1^3+X_1^4)(1+X_2+X_2^2+X_2^3+X_2^4)\cdots(1+X_9+X_9^2+X_9^3+X_9^4)$$
$$=\sum_{0\le n_1+\cdots+n_9\le 36} X_1^{n_1}X_2^{n_2}\ldots X_9^{n_9}$$

(每一張都可選 0 張~4 張)故最小維度 m=1 時就選 0 張牌，最大維度 m=36 時選 36 張牌。

(e) 承(d)，故要選 13 張牌時，組合型態就有 $(1+X+X^2+X^3+X^4)^9=\sum_{i=0}^{36}\alpha_i X^i.$

，共 93600 種樣子。

(f) 令 $X_{j_1}X_{j_2}\cdots X_{j_r}$ 為 $X_{10-j_1}X_{10-j_2}\cdots X_{10-j_r}$.，聽牌時會有 2 張牌準備吃、碰或成對，則需增加(找到)一張 Xj(或 Xj-1)使得整副牌胡牌。

故利用(a)~(f)可利用 python 算出聽牌機率，亦可利用方法看出需加哪一張牌能胡牌。

Proposition 5.1. *Consider the 93600 different 13 dot hands.*

(a) *The "Nine Gates" $X_1X_1X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7X_8X_9X_9X_9$ is the unique hand winning all 9 pieces with the probability of 0.000113 for a 13 dot hands as shown in Proposition 3.1 (c).*

(b) *There are 16 hands winning 8 pieces with a combined probability 0.0001 of drawing.*
$X_3X_3X_3X_4X_5X_6X_7X_8X_8X_8X_9X_9X_9$ [winning except for the 1 dot tile]
$X_3X_3X_3X_4X_5X_5X_6X_6X_7X_7X_8X_8X_8$ [winning except for the 1 dot tile]
$X_3X_3X_3X_4X_4X_5X_5X_6X_6X_7X_8X_8X_8$ [winning except for the 1 dot tile]
$X_2X_3X_4X_4X_4X_4X_5X_6X_7X_8X_9X_9X_9$ [winning except for the 4 dot tile]
$X_2X_3X_3X_3X_3X_4X_4X_5X_6X_7X_8X_8X_8$ [winning except for the 3 dot tile]
$X_2X_2X_2X_3X_4X_5X_6X_7X_7X_7X_9X_9X_9$ [winning except for the 9 dot tile]
$X_2X_2X_2X_3X_4X_5X_6X_7X_7X_7X_8X_8X_8$ [winning except for the 9 dot tile]
$X_2X_2X_2X_3X_4X_5X_6X_7X_7X_7X_7X_8X_9$ [winning except for the 7 dot tile]
$X_2X_2X_2X_3X_4X_5X_6X_6X_7X_7X_7X_7X_8$ [winning except for the 7 dot tile]
$X_2X_2X_2X_3X_4X_4X_5X_5X_6X_6X_7X_7X_7$ [winning except for the 9 dot tile]
$X_2X_2X_2X_3X_3X_4X_4X_5X_5X_6X_7X_7X_7$ [winning except for the 9 dot tile]
$X_2X_2X_2X_3X_3X_3X_4X_5X_6X_7X_8X_8X_8$ [winning except for the 1 dot tile]
$X_1X_2X_3X_3X_3X_3X_4X_5X_6X_7X_8X_8X_8$ [winning except for the 3 dot tile]
$X_1X_1X_1X_3X_3X_3X_4X_5X_6X_7X_8X_8X_8$ [winning except for the 1 dot tile]
$X_1X_1X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_6X_6X_6X_7X_8$ [winning except for the 6 dot tile]
$X_1X_1X_1X_2X_2X_2X_3X_4X_5X_6X_7X_7X_7$ [winning except for the 9 dot tile]

(c) *There are 79 hands of "Seven Gates" with a combined probability 0.000942 of drawing.*

(d) *There are 392 hands of "Six Gates" with a combined probability 0.005408 of drawing.*

- *There are 1335 hands of "Five Gates" with a combined probability 0.014215 of drawing.*
- *There are 2948 hands of "Four Gates" with a combined probability 0.029812 of drawing.*
- *There are 6739 hands of "Three Gates" with a combined probability 0.097559 of drawing.*

- *There are 14493 hands of "Two Gates" with a combined probability 0.178968 of drawing.*
- *There are 14067 hands of "One Gate" with a combined probability 0.148473 of drawing.*
- *There are 53530 hands which cannot win with any additional piece, with a combined probability 0.524409 of drawing.*

定理 5.1

(a) 承 3.1(c)，“九門”即能聽 9 種牌的牌型 $X_1X_1X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7X_8X_9X_9X_9$ 機率為 0.000113

(b) 此 16 種“八門”牌型即能聽 8 種牌的牌型機率和約為 0.0001

(c)有 79 種”七門”牌型機率和為 0.000942

(d)有 392 種”六門”牌型機率和為 0.005408

有 1335 種”五門”牌型機率和為 0.014215

有 2948 種”四門”牌型機率和為 0.029812

有 6739 種”三門”牌型機率和為 0.097559

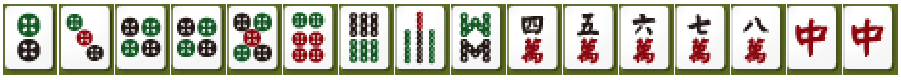
有 14493 種”二門”牌型機率和為 0.178968

有 14067 種”一門”牌型機率和為 0.148473

有 53530 種牌型無法胡牌，機率和為 0.524409

（四)案例分析

1.場上已出現 3 張三萬，試問此狀況胡牌的機率。

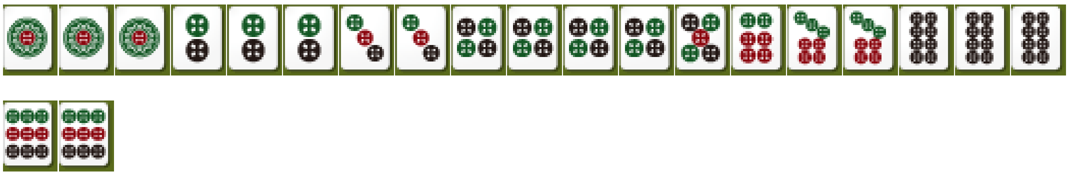


聽三、六、九萬，未出現剩下 12-3-1=8，故所有牌 136 張扣除手牌 16 得 369 萬出現機率為 8/120。

2.試問是否胡牌(同一種牌型)

2 張六萬當眼睛，則 2 張四萬、2 張五萬、2 張六萬組成兩搭；另 2 張五萬、2 張四萬、2 張三萬成兩搭，剩下一二三萬組成一搭，故整副牌胡牌。

3. 試問是否胡牌(同一種牌型 21 張牌)



1.考慮最後端七八九筒需湊成兩搭，則會多一張八筒，不合

2.則 2 張九筒必須成為眼、3 張八筒為一搭，此時又會多七筒一對，有兩對未成搭，此牌不是胡牌形式。

六、參考資料來源

1.【台灣麻將】基礎牌理觀念概略 - 談「數牌特性」
https://home.gamer.com.tw/creationDetail.php?sn=3500823

2.台灣麻將機率與迷思之探討
https://www.shs.edu.tw/works/essay/2008/03/2008033123093886.pdf

3.打麻將的數學冷知識：兵貴神速！如何一眼就知道胡牌了沒？
https://everylittled.com/article/146064

4.臺灣師範大學資工所論文-電腦麻將程式 take 的設計與實作
http://rportal.lib.ntnu.edu.tw/bitstream/20.500.12235/106601/1/n060147034s01.pdf

5.Mathematical aspects of the combinatorial game “Mahjong”
https://arxiv.org/pdf/1707.07345.pdf

6.2022 新手必學【麻將技巧】！想要稱霸全場你一定要看這篇！
https://www.jc168.tw/%e9%ba%bb%e5%b0%87%e5%88%9d%e9%9a%8e%e6%8a%80%e5%b7%a7/2022%e6%96%b0%e6%89%8b%e5%bf%85%e5%ad%b8%e9%ba%bb%e5%b0%87%e6%

8a%80%e5%b7%a7/
7.神來也麻將-台數一覽表
http://www.godgame.com.tw/bigad/event_mj_teach/teach01.html
8.麻將起源 http://atawmj.org.tw/memu009.htm
9. 【麻將台數計算】門清自摸到底算幾台？
https://www.jc168.tw/%e9%ba%bb%e5%b0%87%e5%88%9d%e9%9a%8e%e6%8a%80%e5%b7%a7/%e9%ba%bb%e5%b0%87%e5%8f%b0%e6%95%b8%e8%a8%88%e7%ae%97/
10. 2022 最詳細圖文【麻將規則介紹】！想要成為麻將大師看這篇就夠了！
https://www.jc168.tw/%e8%a6%8f%e5%89%87%e8%aa%aa%e6%98%8e/2022%e6%9c%80%e8%a9%b3%e7%b4%b0%e5%9c%96%e6%96%87%e9%ba%bb%e5%b0%87%e8%a6%8f%e5%89%87%e4%bb%8b%e7%b4%b9/