19 世紀偉大的數學家-波恩哈德・黎曼

報告組別:第 7 組
組員: 林咏勳、高新雄、江晁維、楊荏喻、林鈺祐

第一部分:黎曼生平

黎曼是推進數學的一名重要人物，於西元 1826 年出生於今日德國的下薩克森，排行老二。六歲時開始與父親學習算數，然而父親卻無法給予黎曼足夠的知識，為此還特地聘請數學家教對其進行輔導。據說於 14 歲前，黎曼已研究瑞士數學家李昂哈德・歐拉、法國數學家阿德里安-馬里・勒壤德等人之著作，其一即為數論，非但只使用六天時間，同時在數月後還可清晰解釋書中內容。

西元 1846 年，19 歲的黎曼進入哥廷根大學神學院，主修神學與哲學。期間曾參加數學王子-高斯的最小二乘法講座，由此確立其志向後向父親請願轉往數學界發展。隔年轉入德國柏林大學，受教於數位研究幾何的教授，兩年後轉回哥廷根大學任教，西元 1851 年取得博士學位。

28 歲時，黎曼發表了其第一次演講—「論作為幾何基礎的假設」，開創了黎曼幾何。西元 1857、1859 年，黎曼分別從一般教師晉升為編外教授，正教授。

西元 1862 年，與其妻埃莉澤・科赫結婚。4 年後，因兩國軍隊發生衝突，在逃離途中因肺結核於城市塞拉斯卡去世，享年 39 歲。

黎曼的老師為知名的數學學家—約翰・卡爾・弗里德里希・高斯。高斯的一生，除了給出許多當時數學界難以解決的證明，還培養許多傑出弟子，黎曼的第一篇論文，是由高斯與其一同完成的。同時黎曼走向幾何學發展，也與高斯有關。

第二部分: 黎曼對數學界的貢獻及後世評論

黎曼一生的創作有黎曼ζ函數、黎曼積分、黎曼引理、黎曼流形、黎曼映照定理、黎曼-希爾伯特問題、柯西-黎曼方程，其中最重要的，莫過於黎曼幾何以及黎曼猜想。黎曼猜想在西元 1900 年第二次數學家大會中，位列於希爾伯特 23 個難題中的第 8 位；更於西元 2005 年受美國克萊數學促進會宣布為七個千禧年難題之一，直至今日，7 道千禧年難題只解決了一個，此凸顯出黎曼猜想的難易程度極高。

希爾伯特曾說:如果能在 500 年後重回人間，我第一個想明白的，是黎曼猜想究竟有沒有得到證明。

美國數學學家蒙格瑪利表示，「如果有魔鬼答應讓數學家獻計靈魂以換取一

道數學命題的證明，多數數學家將會選擇黎曼猜想」。

第三部分:由黎曼延伸的有趣問題

一開始，我們需要了解些許先備知識。有人曾說，全體自然數之和等於-1/12，其實這是關於黎曼ζ函數的一則有趣數學問題。

一開始，我們先簡單介紹一下歐拉級數，歐拉級數如下所示:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

If s=1, $\varepsilon(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$,it’s Divergence(發散).

<proof>

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

左式大於右式，右式又發散，因此左式也發散(得證)

If s>1, $\varepsilon(s)$ is Convergence(收斂).

For example, $\varepsilon(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

If s<1, we guess it is Divergence.

But when s=-1, $\varepsilon(-1) = \frac{-1}{12}$

s=-2, $\varepsilon(-2) = 0$

s=-3, $\varepsilon(-3) = \frac{1}{120}$

<proof> use $\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$

When x=-1

$$\frac{-1}{4} = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \cdots = -(1 + 2 + 3 + \cdots) + (2 \times 2 + 4 \times 2 + 6 \times 2 + \cdots) = 3(1 + 2 + 3 + \cdots)$$

That is, 1+2+3+⋯=-1/12

(歐拉在此得出的結論不合理之處在於，此函數的左右式的定義域不同，全式成立的範圍僅限於右式收斂的狀況下才成立)

介紹完歐拉級數後，接著我們介紹黎曼ζ函數的形式。黎曼ζ函數是由歐拉級數延拓而成，型態如以下所示:

When s>1, $s \in \mathrm{R}$, $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$ (式 1)

Whem s≠1, $s \in \mathrm{C}$, $\zeta(s) = \frac{1}{\tau(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$ (式 2)

當 s=-1 時, 我們不能帶入式 1，須帶入式二，如此得到的結果便非為-1/12

為此，全體自然數的和等於-1/12 此說法，在數學界是不成立的。

講完前面的有趣問題後，我們接著探討黎曼猜想的由來。一提到黎曼猜想，我們須先從數學界最特別的—質數說起。古人很早便得知質數是無限多個的，由歐幾里得給出證明，證明方式如下:

設質數是有限個(反證法)，則會出現最大的質數是 p，以下為此題預設之質數數列:<2.3.5.7.11.13.⋯.p>

令 q=(2×3×5×7×⋯×p)+1，接著探討 q 的性質為何

1. 若 q 為質數，q>p，但 p 為最大質數→矛盾
2. 若 q 為合數，則 q 須找到除了 1 與其自身之外的因數，但 q 不是<2.3.5.7.⋯.p>的倍數，也就是非任何質數的倍數，因此 q 為合數不成立

統合以上因素，我們確定 q 不存在，q 不存在的前提條件為質數是有限個，因此質數是有限個此命題不成立，意即「質數是無限個」

既然質數是無限個，我們可進一步探討質數的分布，曾對此進行研究的人選有埃拉拖色尼、歐拉等。歐拉於前一部份提到其級數$\varepsilon(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$，事實上他在研究質數時，還推導出了下列兩條式子:

1. $\varepsilon(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$,p 為全體質數
2. $\pi(x)$(意思為小於 x 所有質數的個數) $\approx \frac{x}{\ln x}$

這三條式子經過後人推展後，衍伸出了質數定理，由高斯及勒讓德提出:

高斯提出 p(x)(意思為質數之密度)≈ $\frac{1}{\ln x}$

勒讓德則提出猜想:$\pi(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} + c$ ，c 為常數，科赫指出，若黎曼猜想成功被證實，則 $c \sim \sqrt{x} \ln x$

接著進入正題，我們來解釋何謂黎曼猜想。前述提到許多次 $\varepsilon(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} +$

$\frac{1}{3^s}+\cdots$ 此級數，透過延拓之後，可以寫成一串式子:

$$\zeta(s)=\frac{1}{2\pi i}\tau(1-s)\oint\frac{z^{s-1}e^{-z}}{1-e^{z}}dz$$

此時的定義域為 $\{s \mid s\neq 1, s\in C\}$

當 $\zeta(s)=0$，我們稱此情形為平凡零點，而平凡零點的解，已被證實是 s=-2n,n∈N。
當 $\zeta(s)\neq 0$，我們稱此情形為非平凡零點，但非平凡零點的解，目前還是無法得知，黎曼猜想，非平凡零點的解，皆位在$s=\frac{1}{2}+bi$ ，也就是實部為$\frac{1}{2}$的直線上，當時的黎曼沒有確切得到證明，因此後世將其命名為—黎曼猜想。

　　黎曼猜想目前尚未得到證明，但是已有了些許進展，當時黎曼礙於式子的繁雜程度未進行精密計算。西元 1896 年，法國數學家雅克・所羅門・阿達馬與比利時數學家德拉瓦・萊普森，將非平凡零點的範圍縮小成實部介於(0,1)之間，也就是 0+bi<s<1+bi 。西元 1903 年，格拉姆算出了 15 個非平凡零點皆位於$s=\frac{1}{2}+bi$ 之上，到了 1932 年，打孔計算機的發明，計算出了 1041 個非平凡零點。西元 1982 年，人們將平凡零點的計算推廣到了 3 億個，且無一例外都不違背黎曼猜想。直至今日，人們靠著大型計算機計算了 13 億個非平凡零點，當然，仍舊符合黎曼猜想。

　　而黎曼猜想到了現在，也曾被幾人宣布證明，其中最近的一次是英國數學家麥可・弗朗西斯・艾提亞(西元 1929 年－西元 2019 年)，他被譽為當代最偉大的數學家之一。在西元 2018 年，艾提亞爵士在德國海德堡的獲獎者論壇中發布論文，然而最終此證明並不成立。

　　黎曼猜想的重要性在於，若黎曼猜想成功被證實，將有 1000 多條命題晉升為定理，但假設若不成立，將會使許多數學家的心血白費。黎曼猜想可謂當今數學界最看重的難題。

第四部份:參考資料來源

【黎曼】為數學而生的天才!極富才華和創造力，留下黎曼猜想價值百萬美金【天才簡史】
https://www.youtube.com/watch?v=kgsDeWjppYU&t=380s
維基百科-麥可・艾提亞
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%BF%88%E5%85%8B%E5%B0%94%C2%B7%E9%98%BF%E8%92%82%E4%BA%9A
1+2+3+4+...=-1/12? 李永樂老師講黎曼猜想(1)
https://www.youtube.com/watch?v=T93SayXhw2w
質數多重要?數學家歐拉和高斯是如何研究質數的?李永樂老師講黎曼猜想(2)
https://www.youtube.com/watch?v=4vbcC4TcMGc
懸賞 100 萬美元的”黎曼猜想”有多難?李永樂老師講甚麼是黎曼猜想(3)
https://www.youtube.com/watch?v=NeoDdnSlRjk
維基百科-赫爾曼·格拉斯曼
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B5%AB%E7%88%BE%E6%9B%BC%C2%B7%E6%A0%BC%E6%8B%89%E6%96%AF%E6%9B%BC
維基百科-雅克·阿達馬
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%9B%85%E5%85%8B%C2%B7%E9%98%BF%E8%BE%BE%E9%A9%AC
維基百科-卡爾·弗里德里希·高斯
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%A1%E7%88%BE%C2%B7%E5%BC%97%E9%87%8C%E5%BE%B7%E9%87%8C%E5%B8%8C%C2%B7%E9%AB%98%E6%96%AF
維基百科-伯恩哈德·黎曼
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BC%AF%E6%81%A9%E5%93%88%E5%BE%B7%C2%B7%E9%BB%8E%E6%9B%BC
每日頭條-為創造而生的數學家—黎曼
https://kknews.cc/zh-tw/science/op4jk26.html
維基百科-李昂哈德·歐拉
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%90%8A%E6%98%82%E5%93%88%E5%BE%B7%C2%B7%E6%AD%90%E6%8B%89
維基百科-哥廷根大學
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%93%A5%E5%BB%B7%E6%A0%B9%E5%A4%A7%E5%AD%A6

英才早逝的黎曼 戴久永

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_04_4_26/index.html