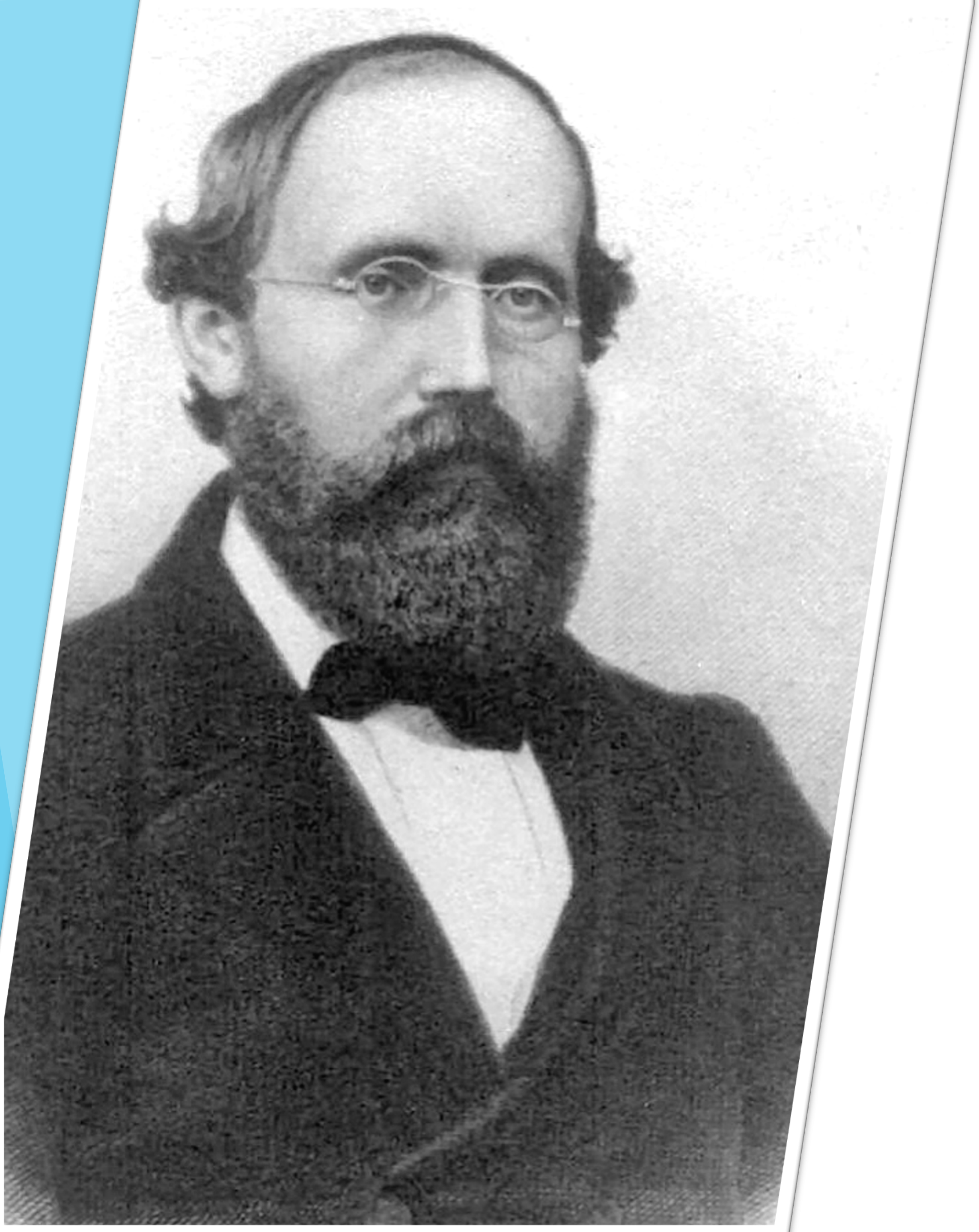
19世紀偉大的數學家
波恩哈德・黎曼

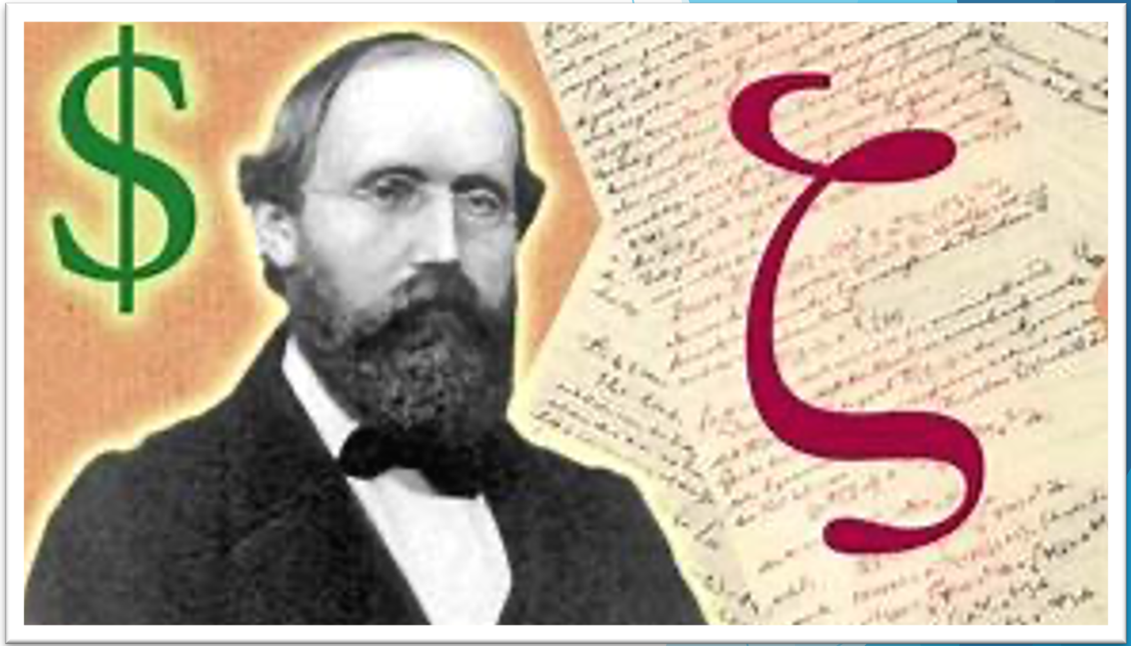
報告組別:第7組

組員: 林咏勳、高新雄、江晁維、楊荏喻、林鈺祐



一.黎曼生平

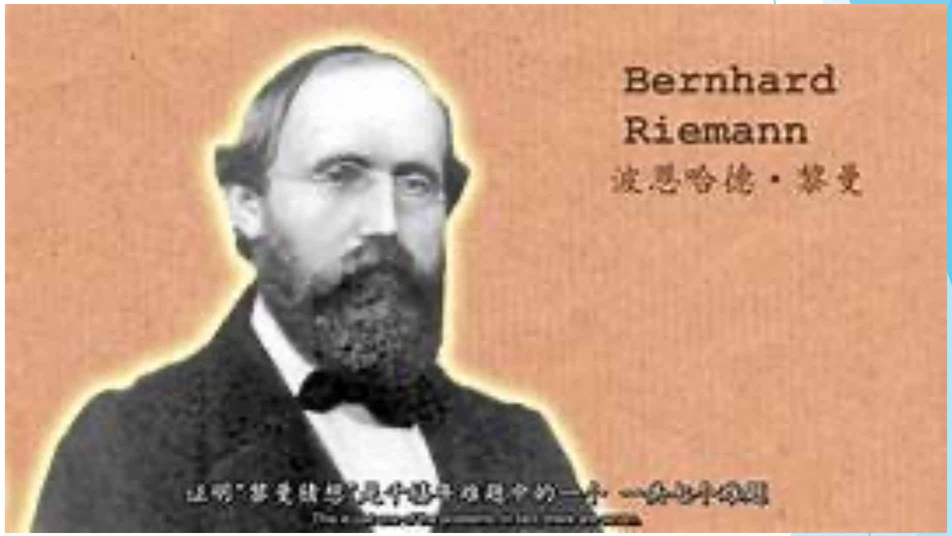
- 黎曼是推進數學的一名重要人物，六歲時開始與父親學習算數，據說於14歲前，黎曼已研究瑞士數學家李昂哈德・歐拉、法國數學家阿德里安-馬里・勒壤德等人之著作，其一即為數論，非但只使用六天時間，同時在數月後還可清晰解釋書中內容。
- 西元1846年，19歲的黎曼進入哥廷根大學神學院，主修神學與哲學。期間曾參加數學王子-高斯的最小二乘法講座，由此確立其志向後向父親請願轉往數學界發展。



- 28歲時，黎曼發表了其第一次演講—「論作為幾何基礎的假設」，開創了黎曼幾何。
- 西元1862年，與其妻埃莉澤・科赫結婚。4年後，因兩國軍隊發生衝突，在逃離途中因肺結核於城市塞拉斯卡去世，享年39歲。
- 黎曼的老師為知名的數學學家—高斯。高斯的一生，除了給出許多當時數學界難以解決的證明，還培養許多傑出弟子，黎曼的第一篇論文，是由高斯與其一同完成的。同時黎曼走向幾何學發展，也與高斯有關。

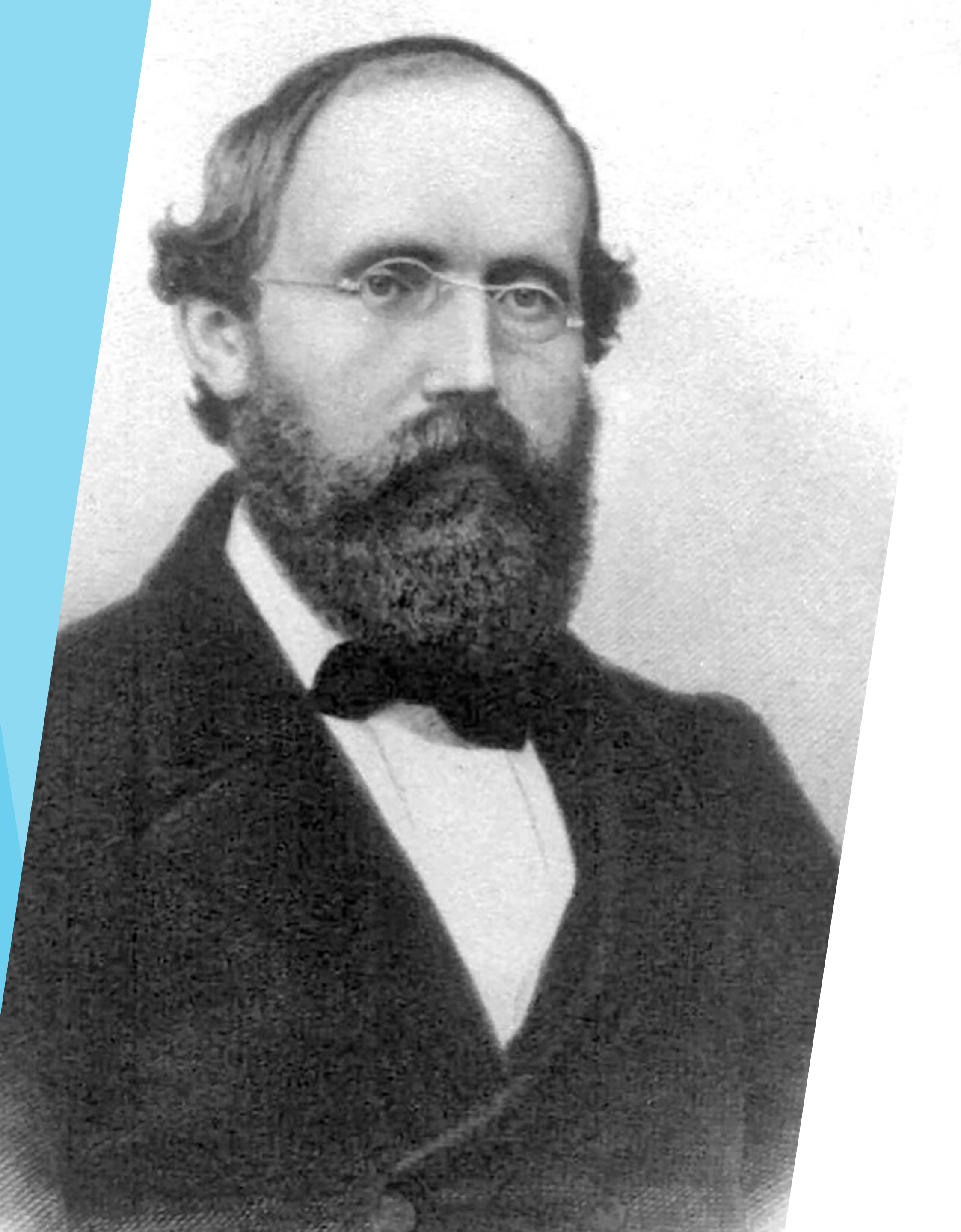
二:黎曼對數學界的貢獻及後世評論

- 黎曼一生的創作有黎曼ζ函數、黎曼積分、黎曼引理等，其中最重要的，莫過於黎曼幾何以及黎曼猜想。黎曼猜想於西元2005年受美國克萊數學促進會宣布為七個千禧年難題之一，直至今日，7道千禧年難題只解決了一個，此凸顯出黎曼猜想的難易程度極高。



黎曼後世評論:

- 希爾伯特曾說:如果能在500年後重回人間，我第一個想明白的，是黎曼猜想究竟有沒有得到證明。
- 美國數學學家蒙格瑪利表示，「如果有魔鬼答應讓數學家獻計靈魂以換取一道數學命題的證明，多數數學家將會選擇黎曼猜想」。



三:由黎曼延伸的有趣問題

- 一開始，我們需要了解些許先備知識。有人曾說，全體自然數之和等於-1/12，其實這是關於黎曼ζ函數的一則有趣數學問題。

一開始，我們先簡單介紹一下歐拉級數，歐拉級數如下所示:

$$\varepsilon(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

If s=1, $\varepsilon(1)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$,it’ s Divergence(發散).

If s>1, $\varepsilon(s)$ is Convergence(收斂).

For example, $\varepsilon(2)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\ldots=\frac{\pi^2}{6}$

If s<1, we guess it is Divergence.

But when s=-1, $\varepsilon(-1)=\frac{-1}{12}$

s=-2, $\varepsilon(-2)=0$

s=-3, $\varepsilon(-3)=\frac{1}{120}$

!UWTTK# ZXJ $\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$

<MJS]"

$$\frac{-1}{4} = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \cdots = -(1 + 2 + 3 + \cdots) + (2 \times 2 + 4 \times 2 + 6 \times 2 + \cdots) = 3(1 + 2 + 3 + \cdots)$$

9MFY NX ð "

竈遣ﾐ 垉斟ひ夾淋簳■ㄢ械█榴ﾐ 垠æ 垉咸窴夾カゆㄨ夾嘘瓖擢■Yæ
ㄉㄨ缶ム夾箴正蕿幓垠ゆㄨ娎腳夾壼墥┴▁缶ム

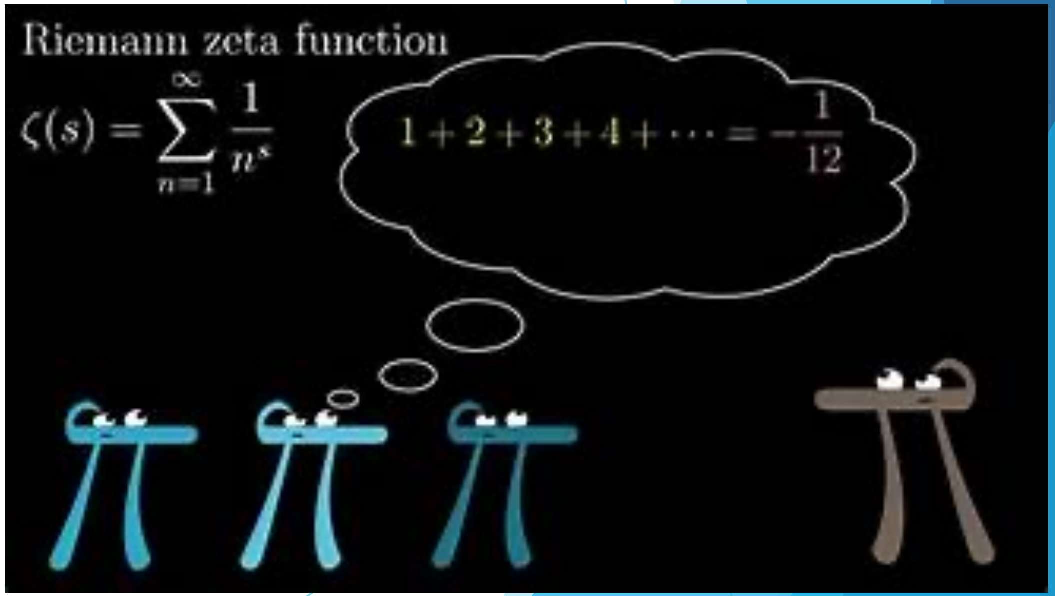
- 介紹完歐拉級數後，接著我們介紹黎曼ζ函數的形式。黎曼ζ函數是由歐拉級數延拓而成，型態如以下所示:

When s>1, $s \in R$, $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$ (式1)

When s≠1, $s \in C$, $\zeta(s) = \frac{1}{\tau(s)} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$ (式2)

當s=-1時，我們不能帶入式1，須帶入式二，如此得到的結果便非為-1/12

為此，全體自然數的和等於-1/12此說法，在數學界是不成立的。



- 一提到黎曼猜想，我們須先從數學界最特別的—質數說起。古人很早便得知質數是無限多個的，由歐幾里得給出證明，證明方式如下:

設質數是有限個(反證法)，則會出現最大的質數是p，以下為此題預設之質數數列:<2.3.5.7.11.13.⋯.p>

令q=(2×3×5x7x⋯xp)+1，接著探討q的性質為何

1. 若q為質數，q>p，但p為最大質數→矛盾
2. 若q為合數，則q須找到除了1與其自身之外的因數，但q不是<2.3.5.7.....p>的倍數，也就是非任何質數的倍數，因此q為合數不成立
3. 統合以上因素，我們確定q不存在，q不存在的前提條件為質數是有限個，因此質數是有限個此命題不成立，意即「質數是無限個」

- 既然質數是無限個，我們可進一步探討質數的分布。歐拉於前一部份提到其級數$\varepsilon(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$，事實上他在研究質數時，還推導出了下列兩條式子:

1. $\varepsilon(s)=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$,p為全體質數
2. $\pi(x)$(意思為小於x所有質數的個數) $\approx\frac{x}{\ln x}$

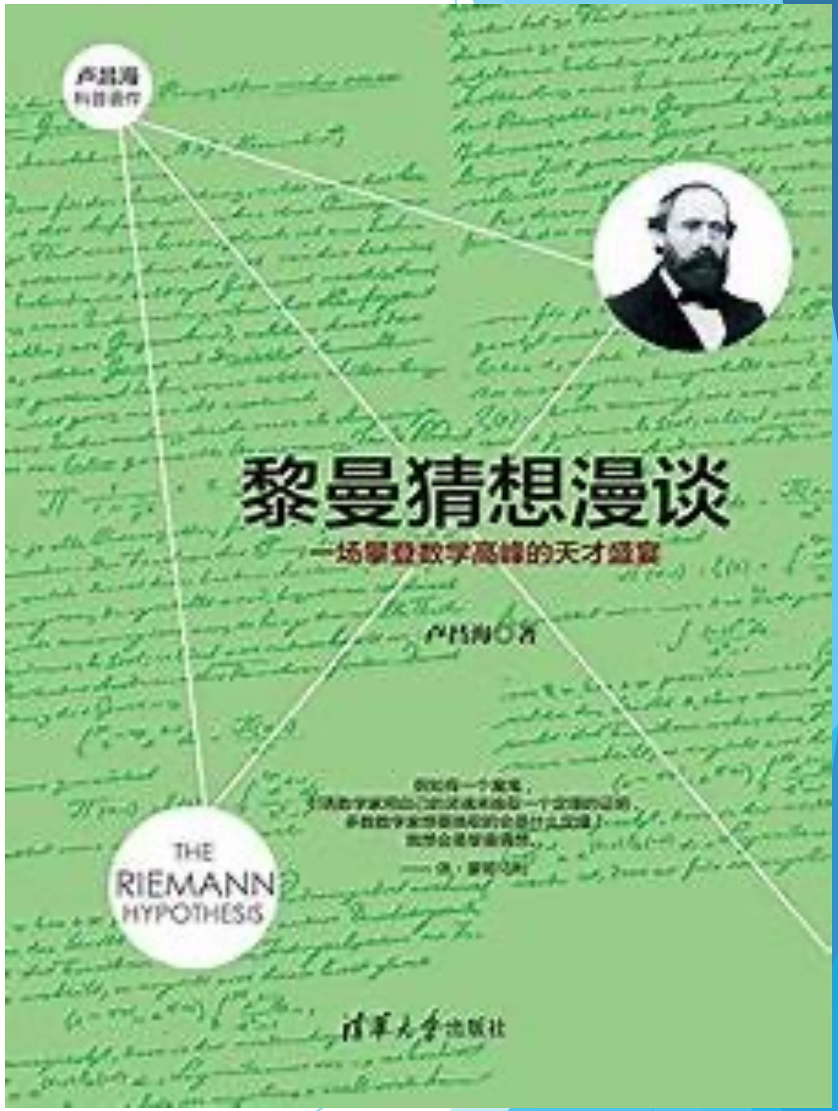
這三條式子經過後人推展後，衍伸出了質數定理，由高斯及勒讓德提出p(x)(意思為質數之密度)$\approx\frac{1}{\ln x}$

勒讓德則提出猜想:$\pi(x)=\int_0^x\frac{dt}{\ln t}+c$，c為常數，科赫指出，若黎曼猜想成功被證實，則$c\sim\sqrt{x}\ln x$

- 接著進入正題，我們來解釋何謂黎曼猜想。前述提到許多次 $\varepsilon(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$ 此級數，透過延拓之後，可以寫成一串式子:

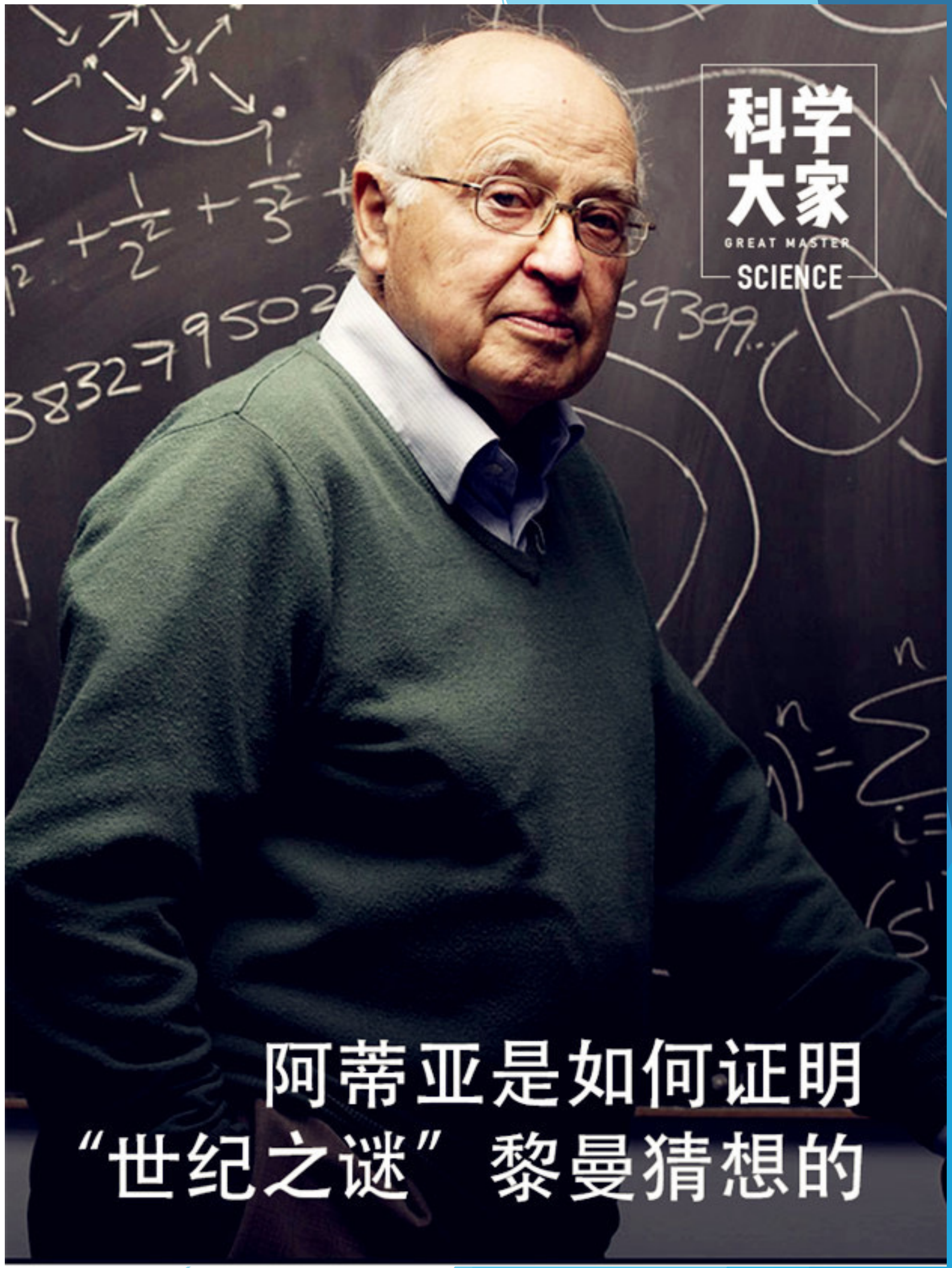
$$\zeta(s)=\frac{1}{2\pi i}\tau(1-s)\oint\frac{z^{s-1}e^{-z}}{1-e^z}dz$$

- 此時的定義域為 $\{s \mid s\neq1, s\in C\}$
- 當 $\zeta(s)=0$，我們稱此情形為平凡零點，而平凡零點的解，已被證實是 s=-2n,n∈N。
- 當 $\zeta(s)\neq0$，我們稱此情形為非平凡零點，但非平凡零點的解，目前還是無法得知
- 黎曼猜想，非平凡零點的解，皆位在 $s=\frac{1}{2}+bi$ ，也就是實部為 $\frac{1}{2}$ 的直線上，當時的黎曼沒有確切得到證明，因此後世將其命名為—黎曼猜想。



- 黎曼猜想目前尚未得到證明，但是已有了些許進展，當時黎曼礙於式子的繁雜程度未進行精密計算。西元1896年，法國數學家雅克·所羅門·阿達馬與比利時數學家德拉瓦·萊普森，將非平凡零點的範圍縮小成實部介於(0,1)之間，也就是0+bi<s<1+bi 。西元1903年，格拉姆算出了15個非平凡零點皆位於$s=\frac{1}{2}+bi$ 之上，到了1932年，打孔計算機的發明，計算出了1041個非平凡零點。西元1982年，人們將平凡零點的計算推廣到了3億個，且無一例外都不違背黎曼猜想。直至今日，人們靠著大型計算機計算了13億個非平凡零點，當然，仍舊符合黎曼猜想。

- 而黎曼猜想到了現在，也曾被幾人宣布證明，其中最近的一次是英國數學家麥可・弗朗西斯・艾提亞(西元1929年－西元2019年)，他被譽為當代最偉大的數學家之一。在西元2018年，艾提亞爵士在德國海德堡的獲獎者論壇中發布論文，然而最終此證明並不成立。
- 黎曼猜想的重要性在於，若黎曼猜想成功被證實，將有1000多條命題晉升為定理，但假設若不成立，將會使許多數學家的心血白費。黎曼猜想可謂當今數學界最看重的難題。



四:參考資料來源

【黎曼】為數學而生的天才!極富才華和創造力，留下黎曼猜想價值百萬美金【天才簡史】

https://www.youtube.com/watch?v=kgsDeWippYU&t=380s

維基百科-麥可．艾提亞

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%BF%88%E5%85%8B%E5%B0%94%C2%B7%E9%98%BF%E8%92%82%E4%BA%9A

1+2+3+4+...=-1/12? 李永樂老師講黎曼猜想(1)

https://www.youtube.com/watch?v=T93SayXhw2w

質數多重要?數學家歐拉和高斯是如何研究質數的?李永樂老師講黎曼猜想(2)

https://www.youtube.com/watch?v=4ybcC4TcMGc

懸賞100萬美元的”黎曼猜想”有多難?李永樂老師講甚麼是黎曼猜想(3)

https://www.youtube.com/watch?v=NeoDdnSlRik

維基百科-赫爾曼·格拉斯曼

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B5%AB%E7%88%BE%E6%9B%BC%C2%B7%E6%A0%BC%E6%8B%89%E6%96%AF%E6%9B%BC

維基百科-雅克·阿達馬

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E9%9B%85%E5%85%8B%C2%B7%E9%98%BF%E8%BE%BE%E9%A9%AC

維基百科-卡爾·弗里德里希·高斯

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8D%A1%E7%88%BE%C2%B7%E5%BC%97%E9%87%8C%E5%BE%B7%E9%87%8C%E5%B8%8C%C2%B7%E9%AB%98%E6%96%AF

維基百科-伯恩哈德·黎曼

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BC%AF%E6%81%A9%E5%93%88%E5%BE%B7%C2%B7%E9%BB%8E%E6%9B%BC

每日頭條-為創造而生的數學家—黎曼

https://kknews.cc/zh-tw/science/op4jk26.html

維基百科-李昂哈德·歐拉

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%90%8A%E6%98%82%E5%93%88%E5%BE%B7%C2%B7%E6%AD%90%E6%8B%89

維基百科-哥廷根大學

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%93%A5%E5%BB%B7%E6%A0%B9%E5%A4%A7%E5%AD%A6

英才早逝的黎曼 戴久永

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_04_4_26/index.html

END
謝謝聆聽