數思報告第九組

主題:猜拳與一筆畫

組員：411031116 楊子毅 411031117 劉秉翰 411031118 張銓敏

411031119 陳柏諺 411031121 戴士宬 411031138 曾國恩

壹、前言

在進入大學的第一個大型活動 — 迎新，在層層關卡中最令我們印象深刻的是猜拳遊戲，沒想到小時候在玩的遊戲在大學的活動中又再次出現，所以從猜拳的部分開始作探討，探究其延伸的玩法與規則，並發現皆可以一筆畫得出，並採雙向研究。

貳、介紹

一、緣由

起源有兩說：一種是起源於中國猜測對方手勢的酒令，明朝人所寫《五雜組》記載漢朝的手勢令，以手掌代表虎膺、指節為松根、大指為蹲鴟，食指為鉤戟，中指為玉柱，無名指為潛虬，小指為奇兵，腕為三洛，五指為奇峯，但他寫不知玩法，因此是否是指三角克制的剪刀石頭布，這仍待考證。

另外一種說法是起源於日本，最早文獻紀錄是 19 世紀初的《拳會角力圖會》。相關資料可見由日本國立民族學博物館所出版的文獻，作者 Linhart, Sepp。日本明治時期開始傳入中國，到了二十世紀剪刀石

頭布的遊戲開始傳到了歐洲與美國，而歐美都稱剪刀石頭布的遊戲是"日本遊戲"，法國人稱剪刀石頭布為"jeu Japonais"（意思就是日本遊戲）。原因就是因為到了二十世紀，日本人大量西化以及日本人到世界各國遊歷的原因，也對歐美推廣了這個遊戲，使得很多歐美人都認為剪刀石頭布就是日本的遊戲。

二、基本規則

基本的剪刀石頭布有三種出拳方式，他們的關係如下：剪刀克制布，布克制石頭，而石頭又克制剪刀，形成一個三角關係。

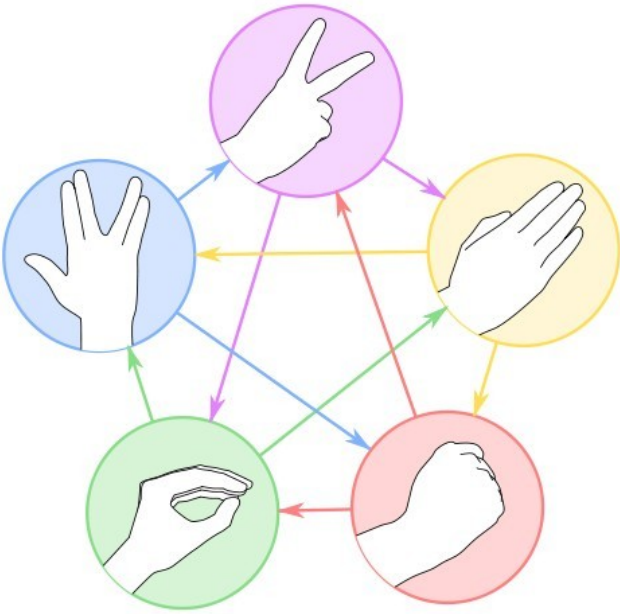
參、延伸與探討

一、為甚麼不能用 2n 種的出拳方式去做一個剪刀石頭布遊戲

為了保證每種拳都和其他種拳有勝負關係，只需要把他們圍成一個正多邊形，然後兩兩相連，也就是正多邊形和所有對角線(總數為 $n*(n-1)/2$)的方向來標記勝負。所以，任意一個奇數邊形都可以擴展成一個剪刀石頭布遊戲。

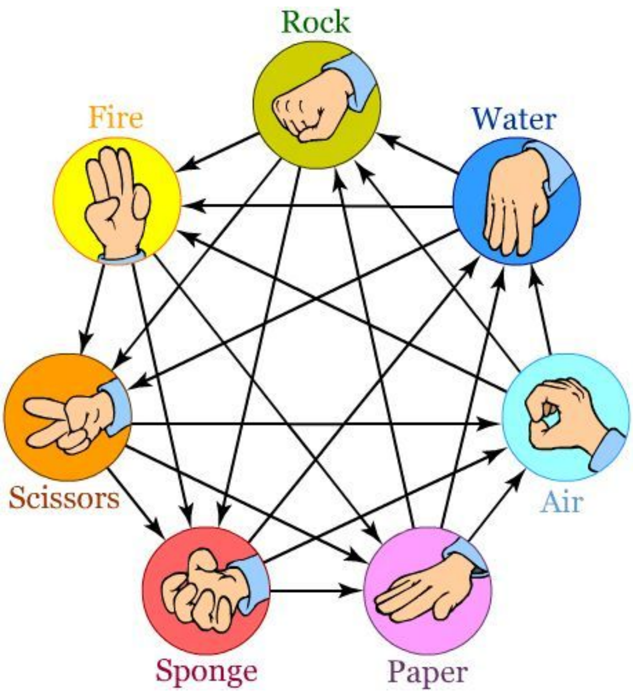
二、2n+1 種拳法組成的剪刀石頭布勝負關係

五種出拳方式，關係如下圖:



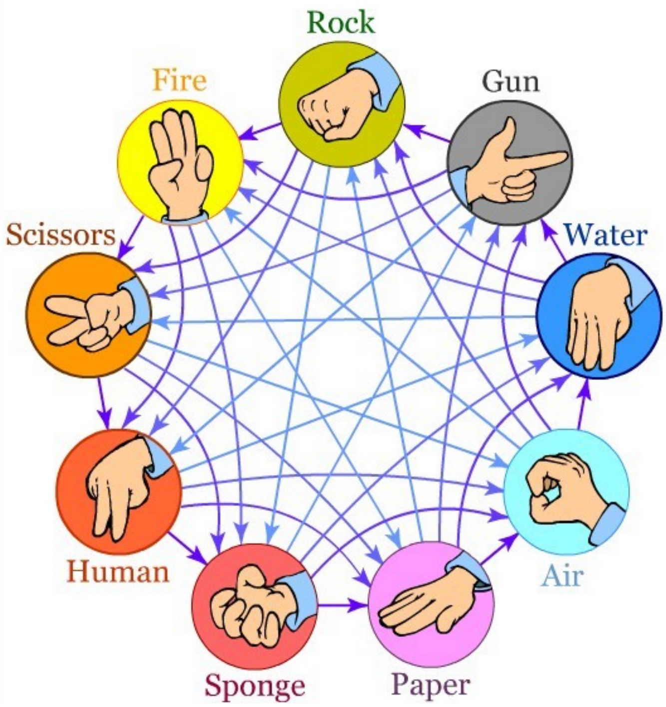
共有 10 條法則

七種出拳方式，關係如下圖:



共有 21 條法則

九種出拳方式，關係如下圖:



共有 36 條法則

由此可得知，我們可以將正多邊形(2n+1)的各點相連線組成一種剪刀石頭布遊戲的勝負法則，及每個法則數為(n*(n-1))/2 條。

三、一筆畫定理

對於一筆畫問題，由歐拉提出並證明。

(一)歐拉

李昂哈德·保羅·歐拉是一位瑞士數學家和物理學家，近代數學先驅之一，在數學的多個領域，包括微積分和圖論都做出過重大貢獻。他引進的許多數學術語和書寫格式，例如函數的記法"f(x)"，一直沿用至今。此外，他還在力學、光學和天文學等學科有突出的貢獻。

著名成就：

- 貝塞爾問題 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$
- 虛數的冪定義 $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$
- 歐拉恆等式 $e^{i\pi}=-1$
- 歐拉-馬斯刻若尼常數 $\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)$

(二)一筆畫問題—七橋問題

河中心有兩個小島。小島與河的兩岸有七條橋連接。在所有橋都只能走一遍的前提下，如何才能把這個地方所有的橋都走遍？

(三)一筆畫定理

<u>無向圖:</u>圖中的邊皆不具有方向性

連通的無向圖 G 有歐拉路徑的充要條件是：G 中奇頂點（連接的邊數量為奇數的頂點）的數目等於 0 或者 2。

連通的無向圖 G 是歐拉環（存在歐拉迴路）的充要條件是： G 中每個頂點的度都是偶數。

證明：

必要性：

1.如果一個圖能一筆畫成，那麼對每一個頂點，要麼路徑中「進入」這個點的邊數等於「離開」這個點的邊數：這時點的度為偶數。要麼兩者相差一：這時這個點必然是起點或終點之一。注意到有起點就必然有終點，因此奇頂點的數目要麼是 0，要麼是 2。

2.如果圖中有兩個奇頂點 u 和 v，那麼加多一條邊將它們連上後得到一個無奇頂點的連通圖。由上知這個圖是一個環，因此去掉新加的邊後成為一條路徑，起點和終點是 u 和 v。

連通無向圖有歐拉路徑的充要條件也可以寫作「圖中奇頂點數目不多於 2 個」，這是因為奇頂點數目不可能是 1 個。實際上，連通無向圖中，奇頂點的數目總是偶數。

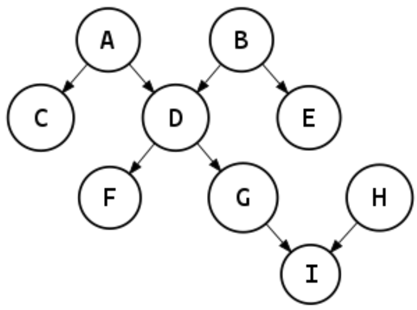
對於不連通的無向圖，如果有兩個互不連通的部分都包含至少一條邊，那麼顯然不能一筆畫。只有當此圖的邊全都在某一個連通部分中（即其它的連通部分都是一個個孤立的頂點，度數為 0），並滿足連通無向圖關於一筆畫的充要條件，而該圖才能一筆畫。也即是說，可以一筆畫的（無向）圖如果不是連通圖，就必定是一個可以一筆畫的連通圖與若干個孤立頂點的組合。

除了用頂點的度數作為判定的充要條件，還可以用圖中邊的特性來作為歐拉迴路存在的判定準則。連通的無向圖 G 中存在歐拉迴路，等價於圖 G 所有的邊可以劃分為若干個環的不交並。具體來說，等價於存在一系列的環 C_1 C_2… C_m，使得圖 G 裡的每一條邊都恰好屬於某一個環。

<u>有向圖補充：</u>

圖由頂點和連接這些頂點的邊所構成。每條邊都帶有從一個頂點指向另一個頂點的方向的圖為有向圖。有向圖中的道路為一系列的邊，系列中每條邊的終點都是下一條邊的起點。如果一條路徑的起點是這條路徑的終點，那麼這條路徑就是一個環。有向無環圖即為沒有環出現的有向圖。

當存在一條從頂點 u 到頂點 v 的路徑時，頂點 v 被稱作是從頂點 u 可達的。每個頂點都是從自身可達的（通過一條沒有邊的路徑）。如果一個頂點可以從一個非平凡路徑（一條由一個或更多邊組成的路徑）到達自身，那麼這條路徑就是一個環。因此，有向無環圖也可以被定義為沒有頂點可以通過非平凡路逕到達自身的圖。

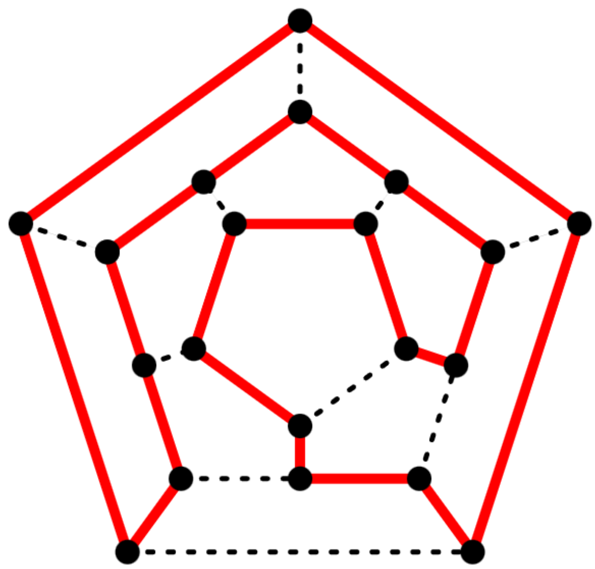


哈密頓問題

哈密頓環問題與哈密頓路徑問題之間有著很簡單的關係：

給定圖 G ,通過加入新頂點 v 並將新頂點與所有其他頂點連接起來，我們得到了圖 H。 在圖 G 之上的哈密頓路徑問題與在 H 之上的哈密頓環問題等價。因此尋找哈密頓路徑的速度不可能比尋找哈密頓環的速度快很多。

從另一個方向來看，給定圖 G，給定圖上一個頂點 v，通過加入新頂點給定圖 v',並且讓 v'的鄰居等於 v 的鄰居，再增加兩個度為 1 的新頂點，並讓他們分別與 v 和 v'相連，得到圖 H，則圖 G 上的哈密頓環問題與圖 H 上的哈密頓路徑問題等價。



肆、結論

(一)猜拳延伸之規則不得已 2n 來做出拳種數，會使拳種贏面機率不相同，故選 2n+1 為出拳種數

(二)奇數拳種的法則數為(n*(n-1))/2 種

(三)歐拉的生平與成就

(四)一筆畫無向圖探討：歐拉圖，無奇頂點與 2 個奇頂點

(五)有向圖的存在與發想

(六)哈密頓問題

伍、參考資料

(一)一筆畫問題 - 維基百科，自由的百科全書

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%80%E7%AC%94%E7%94%BB%E9%97%AE%E9%A2%98

(二)剪刀、石頭、布 - 維基百科，自由的百科全書

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%9F%B3%E5%A4%B4%E3%80%81%E5%89%AA%E5%AD%90%E3%80%81%E5%B8%83#%E5%8E%86%E5%8F%B2%E8%B5%B7%E6%BA%90

(三)「剪刀石頭布」遊戲還有其它變種嗎？ - 知乎

https://www.zhihu.com/question/20652842

(四)一筆畫問題_百度百科 https://baike.baidu.hk/item/7816446

(五)李昂哈德·歐拉 - 維基百科，自由的百科全書

https://www.bing.com/search?q=有向圖

&form=ANNTH1&refig=52d65b7796eb44ee8607d9a912337bce

(六)有向無環圖 - 維基百科，自由的百科全書

https://zh.wikipedia.org/zh-tw

(七)哈密頓路徑問題 - 維基百科，自由的百科全書

https://zh.wikipedia.org/wik