# 第60屆全國中小學科展歷屆得獎作品

第一組
陳威宏　陳宣睿
邱仲華　游智宇
張天傑　許仲勳

# 佳作-論木塊堆疊的最長延伸值

- 研究動機:
  他們學習高中物理時，學到堆疊積木，盡量延伸而不讓積木傾倒，但在其中並沒有嚴謹的證明，因此讓他們產生疑惑，想證明明其正確性，並延伸學習探討。

- 研究目的:
  證明其為正確，且找其應用。

- 類別:數列、微積分

# 佳作-密克點與心圓的美麗邂逅

- 研究動機:
在 2008 年台灣國際科展有一件作品---共點圓、共圓點中提到：「在完全四邊形中，四個 三角形的外接圓會共點，稱此點為限制點。若再添加一條直線，則可以任意的取出四條直線 ，分別找出它的限制點，而這些限制點又會共圓，稱此圓為限制圓。此種情況會不斷地延續 下去。」，於是我們試著用動態幾何軟體 Ggb 畫看看，發現在完全四邊形中，四個三角形的 外接圓圓心也會共圓。若再添加一條直線，則可以任意的取出四條直線，分別找出它的心圓 ，而這些心圓仍然會共點，同時其圓心又會共圓。而這樣的現象，讓我們聯想到可否推廣到 多條兩兩相交一點的直線，因此決定以此當作研究題材。

- 研究目的:
在完全四邊形中，四個三角形的外接圓會共點，稱其為密克點。同時其圓心也會共圓， 稱其為心圓。若將其推廣到$n(n \geq 4)$條無三線共點且無平行線組的直線，則會有相對應的$n$線形的密克點和心圓。本研究的目的在探究這種現象會不斷地延續下去，並給予證明。

- 類別:幾何

# 佳作
# 正N邊形等距異色之頂點最少塗色數探討

- 研究動機:
  看到題目:將正 17 邊形的頂點塗色且滿足：對任意兩頂點$P$、$Q$，若由$P$沿此17邊形走較短路徑到$Q$恰通過3,5,9 個點(包含$P$、$Q$)，則$P$、$Q$不同色。試問最少要幾色?

- 研究目的:
- 一、正$n$邊形頂點塗色，只設定一數$m$，兩頂點間若隔著$(m-1)$個頂點則塗不同色，求最少塗色數。
- 二、正$n$邊形頂點塗色，設定兩數$m_1$與$m_2$，兩頂點間若隔著$(m_1-1)$或$(m_2-1)$個頂點則塗不同色，求最少塗色數。
- 三、正$n$邊形頂點塗色，設定$k$個數$m_1$、$m_2$、…、$m_k$，兩頂點間若隔著$(m_1-1)$、$(m_2-1)$、…或$(m_k-1)$個頂點則塗不同色，求最少塗色數的上界與下界，並細部區分各情況上界。

- 類別:排列組合

# 佳作-城式尋堡

- 研究動機:
  看到題目:有一個2 × 7的方格(如下圖)，將方格編號 1~14，在方格中選取若干格子塗成黑色(也可以全不選)，使得兩個黑色的格子都不共邊的方法數。

- 研究目的:
  利用城堡多項式解決上述問題，並嘗試將其推廣到在$m \times n$格、可塗多種顏色，並對其某些性質進行討論。

- 類別:排列組合

# 第三名-公園跑切線

- 研究動機：
  科學研習月刊中第57-7期(2018年10月份)的「森棚教官數學教室」題目是一道有趣的題目，將數學與生活情境作聯結，這正好是第二冊的數列與遞迴關係式的觀念，經網路查詢之後，無相關的文獻資料，於是就以這題目開始研究。

- 研究目的：
- 一、探討綠地邊長為公園邊長的$\frac{1}{3}$倍、$\frac{1}{4}$倍的情況。

- 二、探討綠地邊長為公園邊長的λ倍的情況，0<λ<1。
- 三、探討公園與綠地是相似的任意三角形，綠地邊長為公園邊長的λ倍的情況，0<λ<1。
- 四、探討公園與綠地是相似的正$n$邊形，$n$ ≥4，綠地邊長為 公園邊長的λ倍的情況，0<λ<1。

- 類別：幾何

# 第三名
# 「基」少成多—探討$n$性生物之子代比例

- 研究動機:

  生物課討論性別比時，思考到更多性別的話，需要如何討論

- 研究目的:
- 一、研究三性生物、四性生物中，性別比是否有理論值，其理論比例為何?
- 二、推廣至$n$性生物中，研究性別比是否也有理論值，其理論比例為何。
- 三、研究在$n$性生物中，第$k$性的性染色體組合數$G_k^n$的求法與其生成函數為何?
- 四、討論第一型有符號斯特林數$s(n,k)$與性染色體組合數$G_k^n$間的關係。
- 五、應用至色盲的範疇，證明在$n$性生物中，色盲之佔比是否有理論值找出其與性別間比例的關係，並說明是否有$X$染色體較多的性別表現色盲的機會卻大於$X$染色體較少的性別。
- 六、如何以現有之色盲比例反求$X$染色體異常(即$X^-$之機率。
- 類別:排列組合

# 第三名-圓例覺醒

- 研究動機:

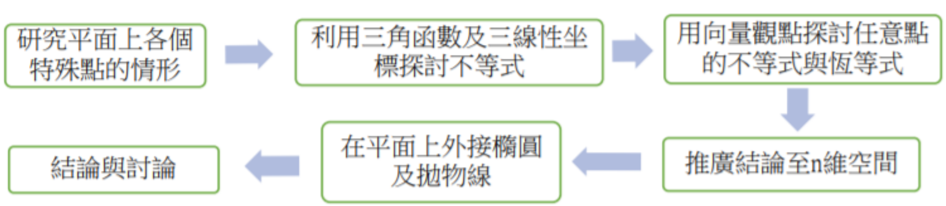
於 2017 年國際科展[1](石博允、錢昀，2017)提到「任意給定$\triangle ABC$與其外接圓$O$和重心$G$，若$\overline{AG}$、$\overline{BG}$、$\overline{CG}$分別交$O$於$A'$、$B'$、$C'$，則$\frac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}}+\frac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}}=6$」。讓我們很驚艷三角形的衍生線段有如此特殊的比值相加關係，恰巧當時數學課在介紹費馬點，費馬點、兩個頂點和衍生點有著四點共圓的關係，於是我們用 GGB 觀察，並更改比值為「相乘」關係，發現任意給定三內角都小於$120^{\circ}$的$\triangle ABC$，透過算幾不等式可得$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\geq 8$，這引起了我們很大的好奇，其他特殊點是否也有這個不等式。

- 研究目的:

一、嘗試用多種方法來探討當三角形內的點為費馬點、外心、內心、垂心、重心等特殊點時之比值與極值為何？並將範圍延伸至任意點。

二、將二維延伸至三維、$n$維空間，並探討其特性。

三、找出其他特殊比值的極值，並證明之。




- 類別:幾何

# 第二名
# 兩正$n$邊形所圍$2n$邊形交錯邊的$m$次方和

- 研究動機:

我們在參考資料[1]中發現兩個正三角形部分重疊相交出來的六邊形之交錯邊的二次方和相等的結果，詳見『**引理 1**』，我們實際用 Geogebra 繪圖軟體做了測試，發現結果無誤，於是就想說對於其他的正多邊形是不是也有類似的結果，我們先是用軟體測試，發現在正方形與正五邊形均有類似的結果，最後我們發現『**引理 1**』其實可以推廣到正多邊形，並且我們從正三角形、正方形與正五邊形的證明過程發現如下的規則：『當$0 \le m \le n-1$時，兩正$n$邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊的$m$次方和會相等；而當$m \ge n$時，雖然兩正$n$邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊的$m$次方和不再維持恆等，但在滿足特定的條件下，還是有機會相等的。』

- 研究目的:

一、將『**引理 1**』推廣到正$n$邊形，並探討兩正$n$邊形之邊所在直線所圍$2n$邊形之交錯邊的 m 次方和是否維持恆等，抑或需滿足特定的條件才會相等。

- 類別:幾何

# 第一名-正三角形的最小拼接

- 研究動機:

「給邊長分別為7、5、3的三種正三角形，如何使用這三種正三角形拼出另一正三角形，使其邊長達到最小？」在高一的數學課堂中，老師提出上述問題作為我們專題研究的參考題材，我們對此問題甚感興趣，除了找出此問題的解外，也嘗試把「7、5、3」轉換成「$a$、$b$、$c$」進行研究，並希望能將$a$、$b$、$c$轉換為任意三種正整數邊長的正三角形，且推得此三數所能拼出之最小正三角形的一般化結論。

- 研究目的:

一、使用三種邊長兩兩互質的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長最小。

二、使用三種邊長互質的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長最小。

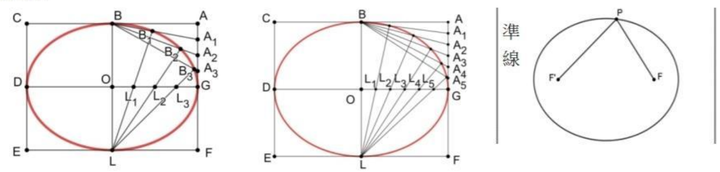
三、使用三種任意正整數邊長的正三角形，利用特定拼法拼出另一正三角形，使其邊長最小。

- 類別:幾何，組合

# 團隊合作獎
# Shoot!圓錐曲線神射手

- 研究動機：

在數學課我們看到了一題競賽題『矩形 $ACEF$ 中，$\overline{EF}=8$，$\overline{CE}=6$，$B$、$D$、$L$、$G$ 分別為矩形四條邊之中點，$L_1$、$L_2$、$L_3$ 是 $\overline{OG}$ 的四等分點，$A_1$、$A_2$、$A_3$ 是 $\overline{AG}$ 的四等分點，請證明 $\overleftrightarrow{LL_1}$ 與 $\overleftrightarrow{BA_1}$、$\overleftrightarrow{LL_2}$ 與 $\overleftrightarrow{BA_2}$、$\overleftrightarrow{LL_3}$ 與 $\overleftrightarrow{BA_3}$ 的交點 $B_1$、$B_2$、$B_3$ 都在橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上』，我們用了 $GGB$ 做測試，發現 $\overline{OG}$、$\overline{AG}$ 任意 $n$ 等分點的對應線束交點仍落在同一個橢圓上，引起我們很大的好奇心。




此題的橢圓製造方式跟課本的截然不同，我們查到射影幾何(朱德祥,朱維宗(2007))[1]中，有個很特別的定理「兩個不共心的射影線束之對應線交點，連同兩個線束的心，其軌跡為一二次曲線」。題目裡兩組點列中的點是相鄰等距的，所以，我們先探討一線束中心在無窮遠處時的情況，即『分別自五條相鄰等距的平行線束取五點，滿足哪些特定條件，會形成特定圓錐曲線。』最後討論任意兩線束和三線束的相對位置，以及特定的對應方式來製造特定圓錐曲線。

- 研究目的：

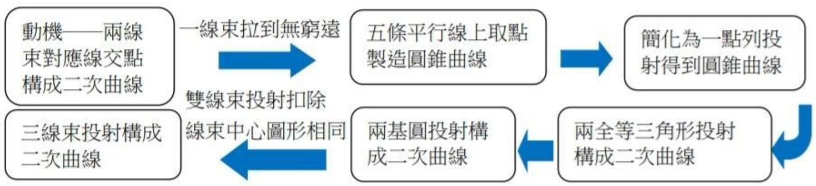
一、在五條平行線間分別取五個點，滿足特定條件，生成特定的二次曲線。

二、以一個點列 $l(A_k)_{k=1}^{4}$ 的點 $A_k$ 往平面上一點 $B_0$ 投射，改變點列上點的相對位置可生成特定的圓錐曲線。

三、透過兩基線、兩基圓來定義兩線束，並討論相對位置與對應方式，來生成特定二次曲線。

四、定義三線束的對應關係，來生成橢圓。

五、研究流程圖




- 類別：幾何

# 探就精神獎-數迴從之

- 研究動機:
  在專題課的下課時分，在教室書櫃找到數戰數決一書，使被書中的精彩故事深深吸 引，同時讓我們對 IMO 國際數學奧林匹亞競賽有更多的認識，也對它的試題產生好奇。上課 時，我們上網觀摩幾屆數奧的試題與解析，發現一道結合等差數列與週期性的題目： 我們對具有週期性的等差數列(以下稱週期數列)感到相當有趣，決定深入探討週期數列的性質及尋找能形成週期數列的條件，並定義新題目如下：

  $$a_{n+1}=\begin{cases}\sqrt{a_n} & 若\sqrt{a_n}為正整數\\ a_n+3 & 其他情況\end{cases}$$ 對於所有$a_n>1$，$k\in\mathbb{N}$ 且$n\in\mathbb{N}$ 皆成立。

  尋找一數$a_n$滿 足存在無限多個$a_m$ ， $m\in\mathbb{N}$， $m>n$且$a_m = a_n$ 。
- 研究目的:
- 一、尋找單純週期數列形成的條件。
- 二、討論在公差為一個質數、多個質數相乘，乃至於多質數相乘且存在高次方，如何在給定公 差後尋找一數代入$a_n$使數列形成週期。
- 三、探討特殊週期數列形成的條件與建構方式。

- 類別:數列

# （鄉土）教材獎
# 十全十美---銳角三角形內特殊點分割三角形面積比

- 研究動機：
  一天數學老師在上三角函數中的正弦定理，有複習三角形的外心性質，進而考我們2020年亞太數學奧林匹亞競賽初選考試試題第二部分的非選擇題二，我們從未想過這類的問題，因此開始著手進行這一系列的研究。

- 研究目的：
  針對銳角三角形的三角形外心、重心、內心、垂心，還有其他六個特殊點：九點圓圓心、布洛卡兒點、費馬點、熱爾崗點、奈格爾點、斯俾克點，等連接三頂點分割三角形的面積比作統整與歸納。

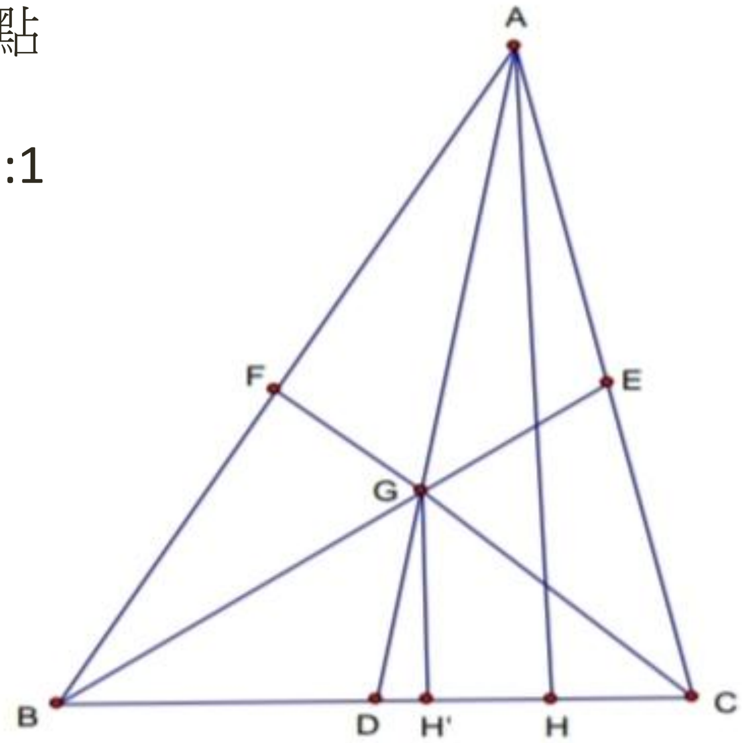
- 類別：幾何

（鄉土）教材獎
十全十美---銳角三角形內特殊點分割三角形面積比

- 研究過程：

1.重心(G):三條中線交點

[GBC]:[GCA]:[GAB]=1:1:1

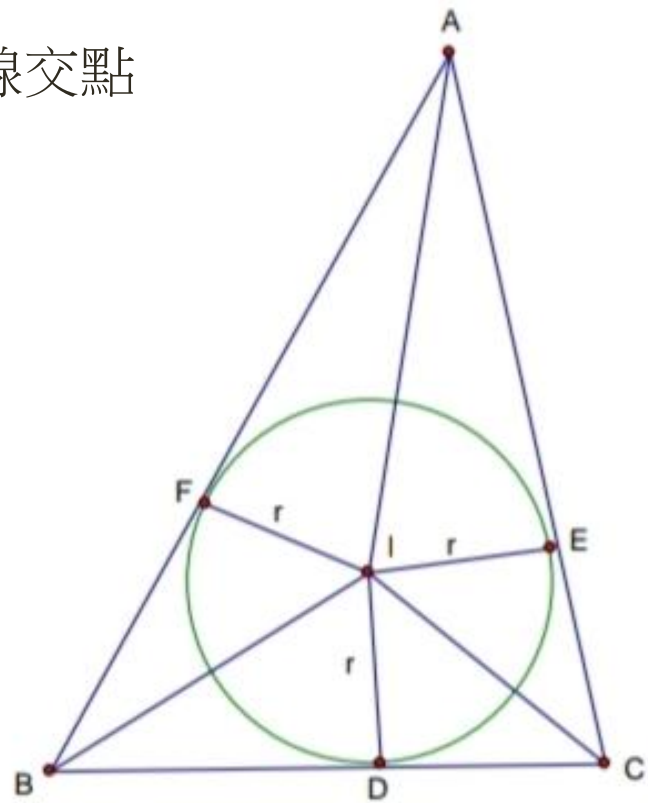


（鄉土）教材獎
十全十美---銳角三角形內特殊點分割三角形面積比

- 研究過程：

2.內心(I):三條角平分線交點

[IBC]:[lCA]:[IAB]=a:b:c

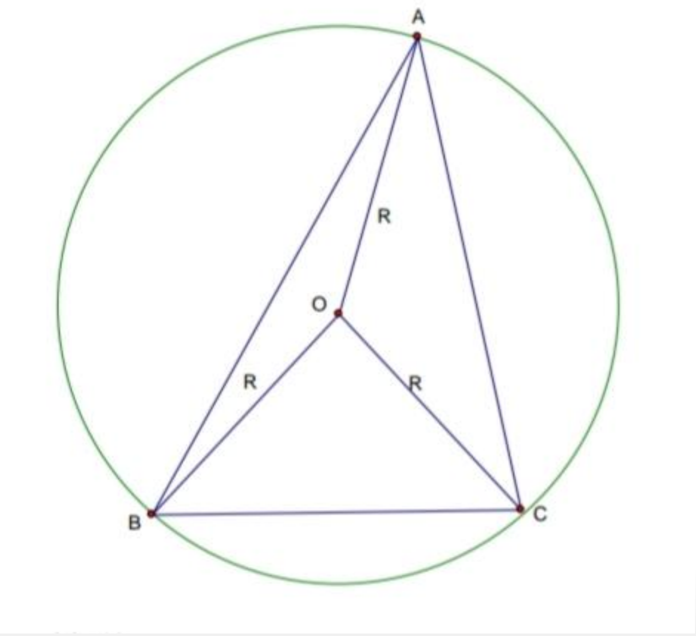


# （鄉土）教材獎
# 十全十美---銳角三角形內特殊點分割三角形面積比

- 研究過程：

3.外心(O):三邊中垂線交點

[OBC]:[OCA]:[OAB]=a cosA : b cosB : c cosC

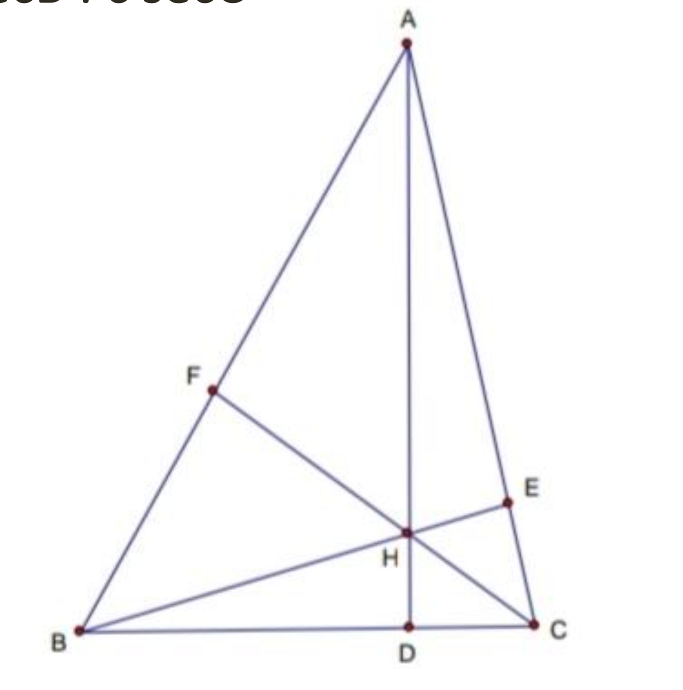


# （鄉土）教材獎
# 十全十美---銳角三角形內特殊點分割三角形面積比

- 研究過程：

4.垂心(H):三條高的交點

[HBC]:[HCA]:[HAB]=a secA : b secB : c secC

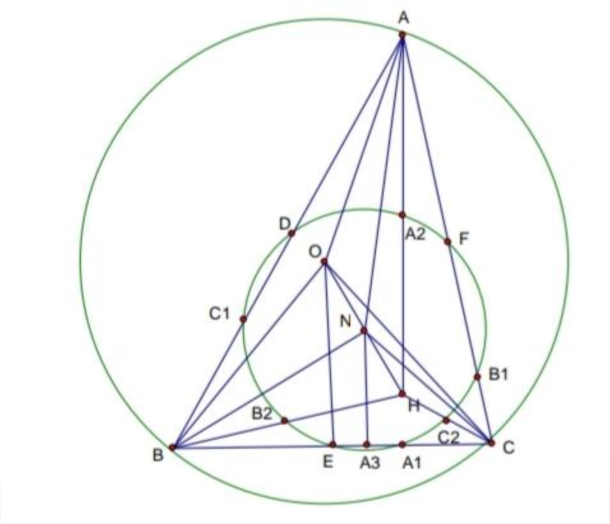


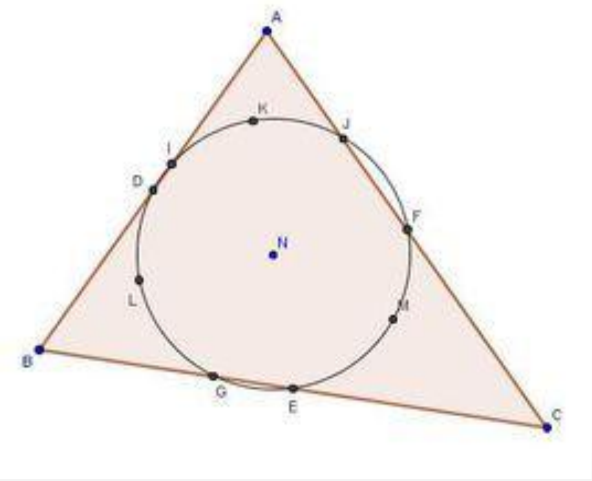
# （鄉土）教材獎
# 十全十美---銳角三角形內特殊點分割三角形面積比

- 研究過程：

5.九點圓圓心(N):過三角形三邊中點，三高之垂足，頂點至垂心中點，此九點之圓心

[NBC]:[NCA]:[NAB]=[OBC]+[HBC]:[OCA]+[HCA]:[OAB]+[HAB]



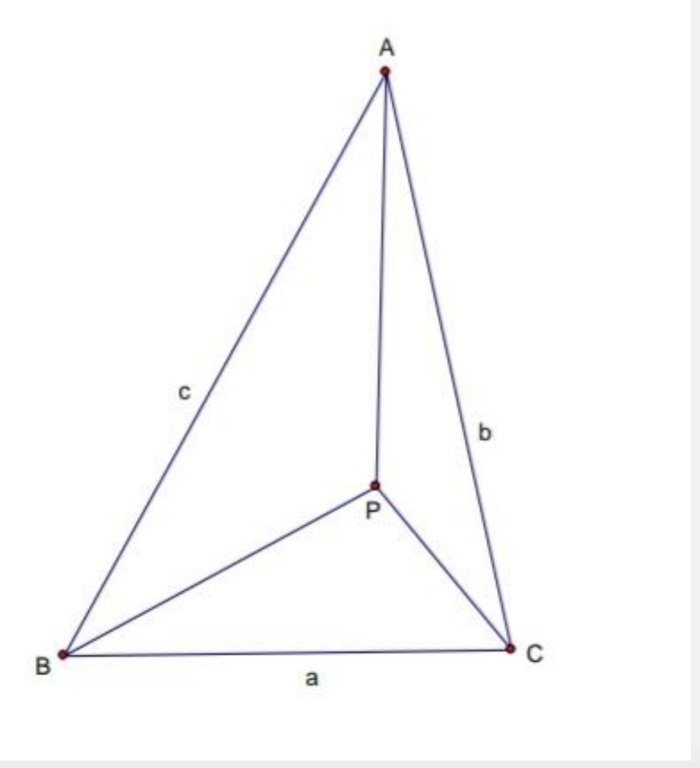



# （鄉土）教材獎
# 十全十美---銳角三角形內特殊點分割三角形面積比

- 研究過程：

6.布洛卡兒點(P):三角形內部有一點P,使∠PBC= ∠PCA =∠PAB=α

[PBC]:[PCA]:[PAB]=$1/b^2:1/c^2:1/a^2$

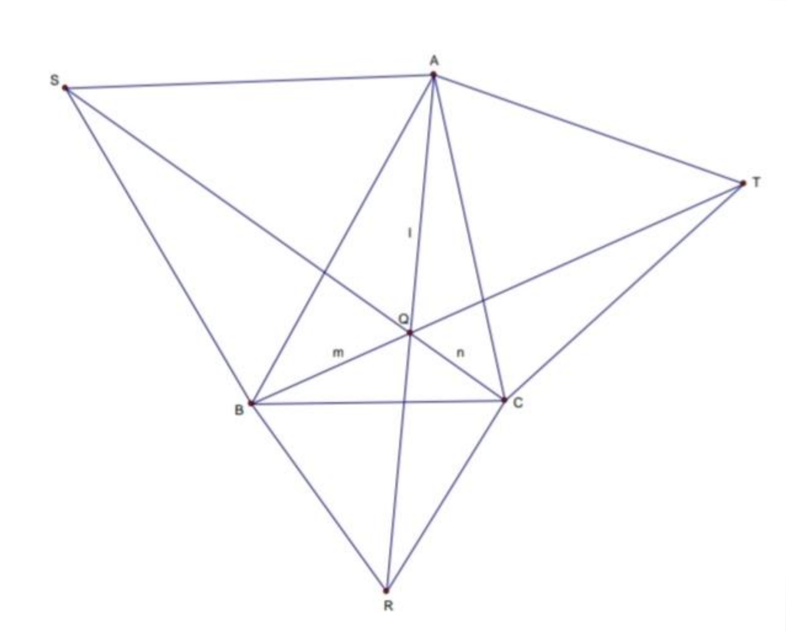


# （鄉土）教材獎
# 十全十美---銳角三角形內特殊點分割三角形面積比

- 研究過程：

7.費馬點(Q):三角形內部一點Q,至三角形三頂點有最小距離

[QBC]:[QCA]:[QAB]=a csc(A+π/3):b csc(B+π/3):c csc(C+π/3)

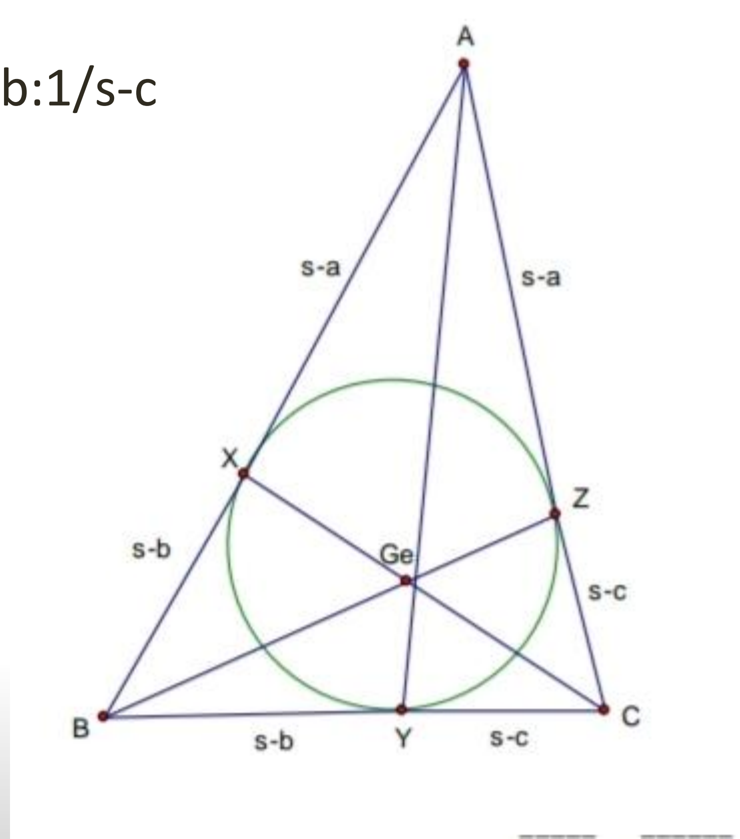


# （鄉土）教材獎
# 十全十美---銳角三角形內特殊點分割三角形面積比

- 研究過程：

8.熱爾崗點(Ge): ΔABC的內切圓與三邊切於 X,Y,Z 三直線，直線 AY,BZ,CX 交於一點 Ge

[GeBC]:[GeCA]:[GeAB]=1/s-a:1/s-b:1/s-c

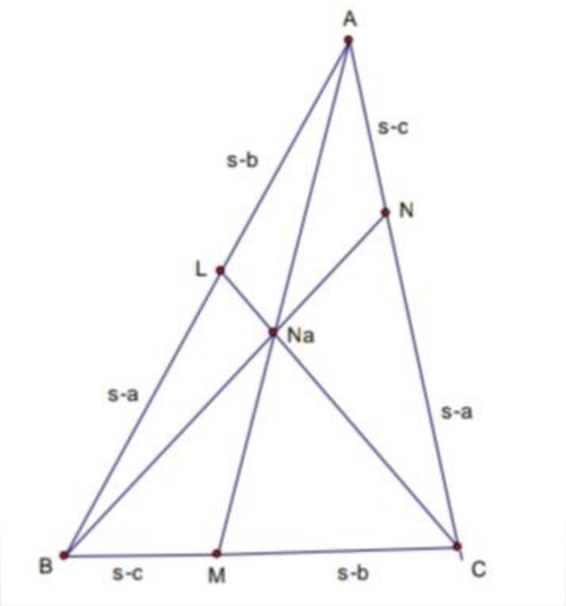


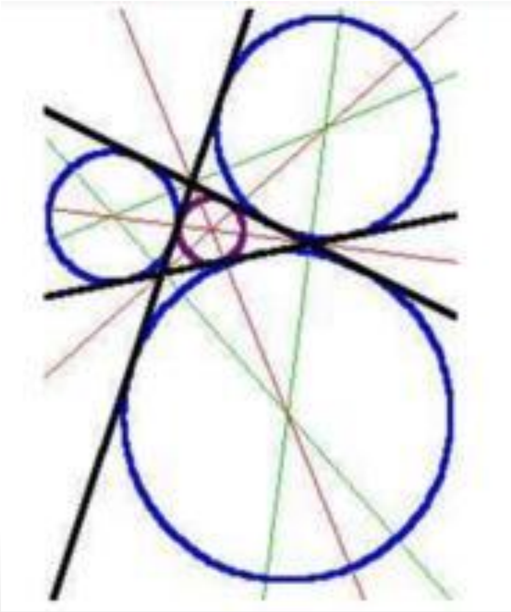
# （鄉土）教材獎
# 十全十美---銳角三角形內特殊點分割三角形面積比

- 研究過程：

9.奈格爾點(Na): ΔABC的三個傍切圓與三邊切於L,M,N三點，直線 AM,BN,CL 交於一點 Na

[NaBC]:[NaCA]:[NaAB]=s-a:s-b:s-c



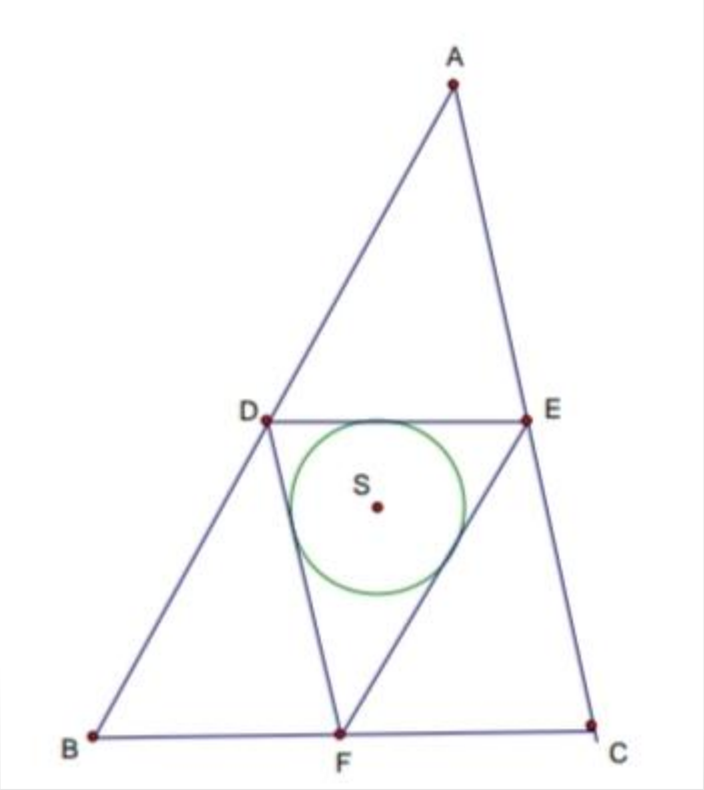



# （鄉土）教材獎
# 十全十美---銳角三角形內特殊點分割三角形面積比

- 研究過程：

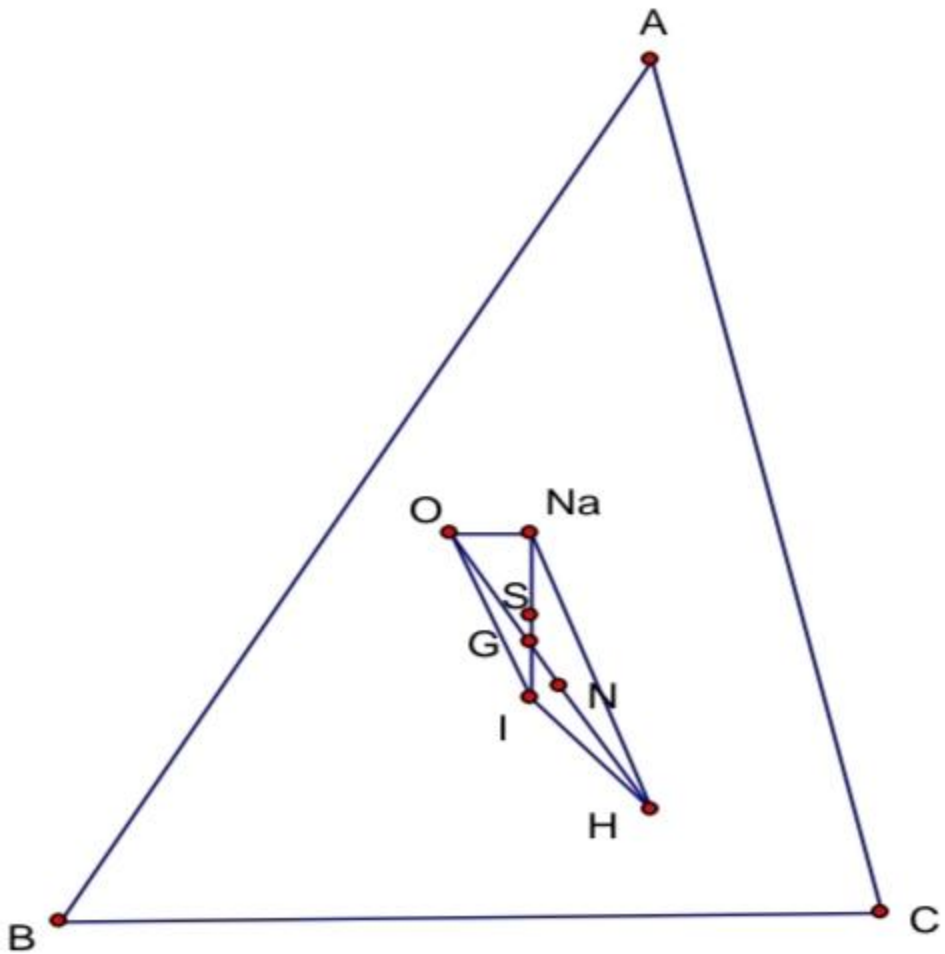
10.斯俾克點(S):三角形三邊中點所連成的中點三角形的內切圓圓心

[SBC]:[SCA]:[SAB]=b+c:c+a:a+b



我們將這十個銳角三角形內的特殊點分割三角形的面積比作個總表以方便我們運用

| $Z$ | $a\Delta ZBC : a\Delta ZCA : a\Delta ZAB$ |
|---|---|
| 重心 $G$ | $1:1:1$ |
| 內心 $I$ | $a:b:c$ |
| 外心 $O$ | $a\cos A : b\cos B : c\cos C$ |
| 垂心 $H$ | $a\sec A : b\sec B : c\sec C$ |
| 九點圓圓心 $N$ | 外心+垂心 |
| 布洛卡兒點 $P$ | $\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}$ |
| 費馬點 $Q$ | $a\csc\left(A+\frac{\pi}{3}\right):b\csc\left(B+\frac{\pi}{3}\right):c\csc\left(C+\frac{\pi}{3}\right)$ |
| 熱爾崗點 $Ge$ | $\frac{1}{s-a}:\frac{1}{s-b}:\frac{1}{s-c}$ |
| 奈格爾點 $Na$ | $(s-a):(s-b):(s-c)$ |
| 斯俾克點 $S$ | $(b+c):(c+a):(a+b)$ |



A
O
Na
S
G
N
I
H
B
C