一個紙牌遊戲的策略問題

第二組

組長:

- 411031108 魏碩廷

組員:

- 411031106 張心玫
- 411031109 羅允澤
- 411031128 蔣一豪
- 411031136 陳筠婷
- 411031142 倪詩晶

050403：

一個紙牌遊戲的策略問題

得獎名次：第一名

類別分析：排列組合

By:411031109 羅允澤

研究動機:

A、B 兩方以一副牌面數字為 1~m 的m張牌進行遊戲，每方各持有其中 n 張牌，其中 2n≤m 雙方每次各出一張牌，牌面數字大者獲勝，如此進行 n 回合的比賽，稱為一輪。

若 m>2n 時，B 方就不能根據自己手上的牌確認對手 A 方的牌，因此每一回合的勝負是隨機的。但若 B 方能知道 A 方的出牌邏輯，則 B 方是否有一個輸得比較少(即贏得比較多)的策略?

411031109 羅允澤

假設每一輪的遊戲中，A、B 兩方手上的牌面數字是隨機分配的，而且 A 方會根據自己手上的牌的牌面數字大小，依由小而大的順序出牌(也可以是任一固定的大小順序出牌)，則一輪遊戲的 n 個回合中，B 方要以什麼樣的順序出牌，才能使得每一輪遊戲 B 方輸的回合數之期望值較小呢?

研究目的:

(1)對於一般的 m,n(其中 $2n \le m$)，B 方策略中成本最小的策略是什麼。

(2)如果B方手上有 K 張牌是全部牌面中數字最大的 K 張牌時，成本最小的策略是什麼。

(3)如果將雙方數字相差 1 時的回合視為和局，此時 B 方策略中成本最小的策略是什麼。

411031109 羅允澤

考慮數字為 1~m 的 m 張牌中,若 A,B 兩方各有其中的 3 張牌,而牌面的數字分別為

A：a1, a2, a3

B：b1, b2, b3

m = 10 為例：A、B 兩方分三回合每次各出手上的一張牌，牌面數字較大的一方贏得該回合，比完三回合稱為一輪，每一輪計算雙方輸贏的回合數。

411031109 羅允澤

若 A 方手中牌面的數字為 1、5、9，B 方手中牌面的數字為 10、8、3

B手牌數字

A手牌數字

	10	8	3
1	0	0	0
5	0	0	1
9	0	1	1

g矩陣

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad [g_{ij}]_{3\times 3}$$

411031109 羅允澤

假設 B 方知道 A 方的出牌策略為由小而大的順序出牌。

當 B 方設想一個出牌牌面數字的大小順序，

例如： B 方以手中數字最大的牌對A中數字最小的牌；

B 方以手中數字第二大的牌對A中數字第二小的牌；

B 方以手中數字最小的牌對A方手中數字最大的牌；

則在這一輪(三回合)的比賽中，B方會輸的回合總數為:

B輸回合數=0+0+1=1

B 方採取了某種數字大小的出牌順序與A方進行比賽，這個順序就稱為**策略**。

411031109 羅允澤

則 $[g_{ij}]_{3\times 3}$表示 A 方牌面數字由小而大數來第 i 大的牌，與 B 方牌面數字由大而小數來第 j 小的牌比賽時，A 方在所有可能分配中獲勝的情形總數。

若將Ａ、Ｂ兩方分配到的牌面數字視為隨機，而且Ｂ方採取的策略為以手中數字最大牌對 Ａ方中數字第二小牌；手中數字第二大牌對Ａ方中數字最小牌；手中數字最小牌對Ａ方中數字最大牌，則在一輪比賽後，Ｂ方會輸的回合數的期望值為

$$\frac{1}{C_3^m C_3^{m-3}}(g_{12}+g_{21}+g_{33})$$

411031109 羅允澤

這個期望值會因當Ｂ方所採取的策略不同而改變。因此，使得這個期望值最小(B 方輸掉的回合數之期望值為最小)的策略稱為**最佳策略**。

定義Ｂ方在策略{(1, 2), (2, 1), (3, 3)}下的成本為 $g_{12}+g_{21}+g_{33}$在 m=6, n=3 時

$$[\,g_{ij}\,]_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 4 & 10 & 16 \\ 10 & 16 & 19 \end{bmatrix}$$

Ｂ方在{(1, 2), (2, 1), (3, 3)}策略下的成本為 4＋4＋19＝27。

延伸:田忌賽馬

田忌賽馬是經典的以弱勝強的故事，這個故事大概是這樣的：

齊威王很喜歡比賽，最擅長的就是騎馬射箭了，曾經約過田忌賽馬，各自選出三匹馬，分上中下三個等級進行賽跑。結果顯而易見，齊威王兵強馬壯，同等級的馬總能略勝一籌，田忌最終以完敗收場。田忌不服歸不服，但是自己的馬比人家差，也是沒有辦法的事情。

孫臏見他們的馬總是強一點，於是出了計謀，讓田忌用下等馬對上等馬；上等馬對中等馬；中等馬對下等馬。結果在第一場大敗之後就連勝兩場，之後田忌和齊威王講述了事情的經過，而孫臏獲得了齊威王的賞識。

孫臏的策略是此模型下的策略，亦是**最佳策略**。

411031109 羅允澤

<一個紙牌遊戲的策略問題>是田忌賽馬進階題型

然而，田忌賽馬不僅只是數學問題，我們可以藉由分析對局找出最佳策略，進而做出利於自己的行動

若只是不經思考的按牌的大小出，輸贏的掌握權不在手上

若靜下心思考，更改出牌順序，便能提高勝率，甚至反敗為勝

411031109 羅允澤

050413：

渾「圓」有「定」—
從七圓定理到雙心六圓的推廣

得獎名次：第二名

類別分析：幾何

By:411031142 倪詩晶

研究動機:

從七圓定理得知，這是一恰巧相切又共點的圖形。但是除了諸線共點的性質外，是否會有諸點共線、諸點共圓等特性？如果不是六個小圓而是更多圓或少圓呢？又或同時內外切於兩個內離圓，甚至同時外切於兩個外離圓的情形？於是他們便對此展開研究。

研究目的:

這一研究試圖從七圓定理的性質探討與推廣，進而研究雙心六圓，以至多圓時的作圖關係式與共點、共線、共圓、共錐的不變性探討。

411031142 倪詩晶

050407：

高階線性遞迴數列中的餘數數列之探討

得獎名次：第三名

類別分析：數論

By:411031106 張心玫

研究動機:

高二上數學專修課時，老師提到費氏數列中每一項除以任意正整數後所得的餘數數列性質，因為好奇從而開始研究。首先探討費氏數列中的餘數數列之週期性質，推廣至一般高階線性遞迴數列的情形。在過程中我們配合高中數學課程中學過「數列與級數」、「數論中的同餘性質」、「多項式函數中因倍數定理」及「矩陣」等概念來解決問題。

411031106 張心玫

研究目的:

一、探討高階線性遞迴數列中每一項除以任意正整數後所得餘數數列，證明餘數數列均為(前）週期數列。

二、探討高階線性遞迴數列中係數在何種條件下，其餘數數列中每個週期循環列會有數個 0 均勻分割(含在某項後皆為 0)，深入探討出區分條件。

三、探討高階線性遞迴數列中係數在何種條件下，其餘數數列中每個週期循環列會有數個不全為 0 均勻分割(含在某項後皆為不為 0 的常數)，深入探討出區分條件。

四、探討利用餘數數列性質推導出高階線性遞迴數列的因倍數性質。

050408:

二元 3 平衡 n 字串之排列數探討

得獎名次：第三名

類別分析：排列組合

By:411031108魏碩廷

研究動機：

在100學年度的全國高中數學能力競賽中，有一道題目內容如下：「由0和1排出長度為n的字串稱為二元n字串，若這個二元n字串中出現字串00和字串11的個數一樣多，稱為長度為n的二元平衡字串，以a_n表示長度為n的二元平衡字串的個數，已知a_1= a_2= a_3=2，a_4=4，a_5=6，求a_n的一般式。」

但作者卻發現題目給出的答案為特例解，只有在00-子字串和11-子字串平衡的時候才適用，於是他們便想找出一般化的方法解決這個問題，並將問題擴展成000-子字串跟111子字串平衡時的n位數列排列是否有一般式的解法（即二元3平衡n字串個數是否有一般解）。

411031108魏碩廷

研究目的：

一. 找出原題目的一般式解

二. 二元 3 平衡 n 字串和非平衡n字串之關係式探討

三. 二元 r 平衡 n 字串在滿足字串中無連續 r 個 0 或連續 r 個 1時之個數遞迴式探討。

四. 觀察二元 3 非平衡 n 字串在改變 000-子字串及 111-子字串之差值或字串之長度時，符合個數彼此間有何性質存在？

五. 階差數列中各階階差首項值之求解過程與性質。

411031108魏碩廷

六. 將第五點推廣至二元 r 非平衡 n 字串。

七. 二元平衡 n 字串、二元 3 平衡 n 字串之

$\lim_{n\to\infty}$（$S(n,i,0)$）/$S(n-1,i,0)$)）（i = 2, 3）探討，其中$S(n,i,0)$ 代表長度為n的字串中滿足i-0-子字串(連續i個 0 所形成的子字串)與i-1-子字串(連續i個 1 所形成的子字串)數目相同的個數。

411031108魏碩廷

050410：

擇你一個命中註定——
談經典相親問題與其延伸解

得獎名次：第三名

類別分析：機率

By:411031142 倪詩晶

研究動機：

閱讀賴以威教授的「超展開數學教室」時，注意到了裡面一個有趣的單元「找到人生價值的最大可能機率：37%」，並在其中討論到一個「如何才使自己能選中最適合自己的工作的機率最大化」的問題。人生中都會遇到需要“選擇”的時候，往往會選擇一個時,卻要放棄另一個,甚至是自己所選擇的也往往不是令自己滿意的。所以為了可以在“選擇”時，讓最佳選擇的機率最優化，數學家一直致力於此進行研究。作者們也渴望從中獲得“答案”，並主動對這一個主題進行更深入的研究。

411031142 倪詩晶

研究目的:

期望使相親問題之數學模型更符合現實應用。

411031142 倪詩晶

050404：

正n邊行內接正四邊形之探討

得獎名次：佳作

類別分析：幾何

By:411031136 陳筠婷

研究動機:

在閱讀第 54 屆全國中小學科學展覽歷屆作品時，看到在一個正 n 邊形的三個不同邊上可以內接無限多個正三角形，因此好奇：是否在正 n 邊形內也都能接出正四邊形？是否也有無限多個內接正四邊形？因此開始進行研究和探討。

研究目的:

一、 首先利用電腦繪圖觀察是否所有的正 n 邊形都存在內接正四邊形,再嘗試以數學式證明之。

二、 內接正四邊形有無限多個嗎?

三、 內接正四邊形是否和正 n 邊形有關聯性。

四、 找一個尺規作圖法畫出所有正 n 邊形的內接正四邊形。

411031136 陳筠婷

050405:

巴斯卡正方形

得獎名次：佳作

類別分析：排列列合

By:411031128 蔣一豪

研究動機:

106年學測數學填充第F題[1]，原命題為：「一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共跳了四步。青蛙跳了四步後恰回到原點的機率為？」因每步皆有上、下、左、右4種跳法，所以有4^4種可能的情形，跳回原點的情形有：

左左右右：排列情形有 $\frac{4!}{2!2!}=6$ 種

上上下下：排列情形有 $\frac{4!}{2!2!}=6$ 種

上下左右：排列情形有 $4!=24$ 種

故跳了四步後恰回到原點的機率為$\frac{6+6+24}{4^4}=\frac{9}{64}$

411031128 蔣一豪

這個問題是我們奇幻旅程的開始！我們初遇此問題，思考若是跳動到坐標平面上其他的格子點該如何處理？若是跳動次數增加會有何不同？經初步的計算後，我們發現跳動到坐標 平面上格子點的方法數恰巧與巴斯卡三角形有所關連，例如「圖 1」為跳動 6 次後的情形。

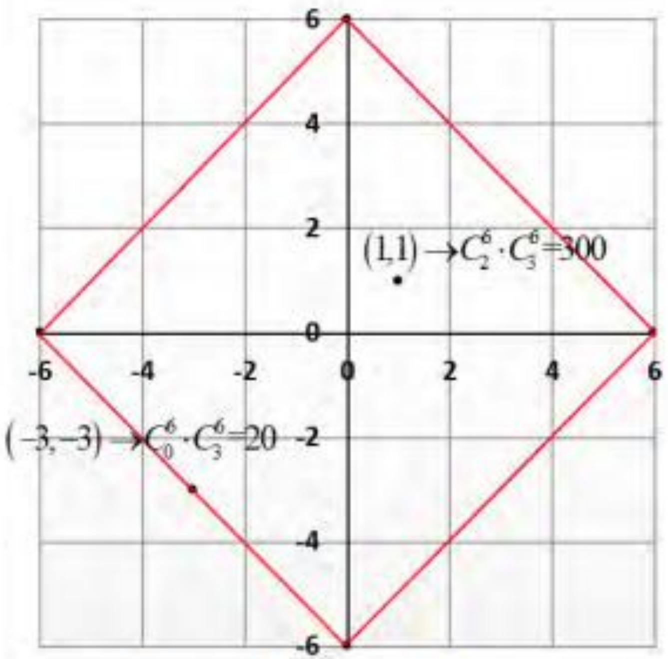


圖 1：跳動 6 次後的情形

411031128 蔣一豪

我們再進一步探討，得到跳動 n 次後停留在坐標平面上格子點(x , y)的機率為:

$$\frac{1}{4^n} C_a^n C_b^n \text{，其中} a=\frac{n-|x+y|}{2} \quad b=\frac{n-|x-y|}{2}$$

將跳動 n 次後停留在坐標平面上格子點(x ， y)的方法數製作成一個表格，並將此表格旋轉45°後以「巴斯卡正方形」來命名；跳動 n 次所製成的「巴斯卡正方形」稱為「n 階巴斯卡正方形」。我們以此「巴斯卡正方形」展開一系列的研究。過程中有趣的現象讓我們推論 出一些意想不到的結果，這是一趟我們與巴斯卡的夢幻之旅！

1	6	15	20	15	6	1
6	36	90	120	90	36	6
15	90	225	300	225	90	15
20	120	300	400	300	120	20
15	90	225	300	225	90	15
6	36	90	120	90	36	6
1	6	15	20	15	6	1

表1：6階巴斯卡正方形(6th Pascal square)

411031128 蔣一豪

研究目的:

我們期盼研究的成果是有發展性與應用性的！至少在某些文創商品、磁磚、衣服與公共藝術上能呈現出這些蘊含數學之美的特殊圖形。在「巴斯卡正方形」中，因不同的組合數被相異的自然數所除會得到若干不同的餘數，由於餘數的個數、位置存在某些特殊的結構，經過著色處理後，就能呈現一些美麗的幾何圖形。基於配色上的需求，計算餘數的個數、位置與對稱性就有其必要，於是我們進一步研究出一些計算餘數的方式，用於尋找這些幾何圖形與配色。

411031128 蔣一豪


學測數學青蛙跳動機率
mod p^n
組合等式
旋轉45度，巴斯卡正方形
Pascal square
同餘問題
八角星
四角星
總和
對角線
excel操作、碎形、著色
mod2
mod3
mod4
mod5
教大中庭系列
棋盤格系列

圖 2：研究方向

050417：

布洛卡點相關性質探討

得獎名次：佳作

類別分析：幾何

By:411031108魏碩廷

研究動機：

　　在查詢布洛卡點的文獻的時候，皆只有提到布洛卡點在三角形內的情形，而且提及到垂心、圓心、投影布洛卡三角形的性質都僅止於到相似與共布洛卡點，因此作者好奇若是將其推廣到四邊形，甚至是多邊形會有什麼結果？而垂心、圓心、投影布洛卡三角形是不是還有些幾何性質沒有被發現？

　　除此之外，作者還對文獻中布洛卡三角形其中一頂點在紐伯特圓上移動的動畫感到十分有興趣，也因此想得知若是將其推廣到四邊形會有何種結果

411031108魏碩廷

研究結果：

一、 探討一般 n 邊形在存在布洛卡點的情形；並探討各種特例。

二、 將垂線、圓心、投影布洛卡三角形一般化推廣，並推廣至 n 邊形；探討其布洛卡點、 外心(外接圓圓心)、頂點連線段間的幾何性質。

三、 探討布洛卡三角形的紐伯格圓推廣至布洛卡四邊形的情形。

四、 探討存在正、負布洛卡點的 n 邊形，其頂點與反演之關係。

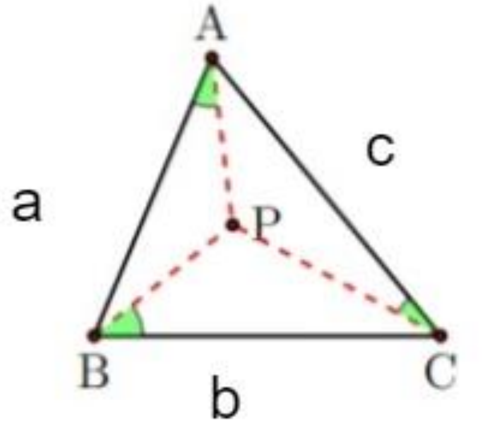
411031108魏碩廷

布洛卡點：

對于給定的三角形，有沒有一點，使得由該點到頂點的線段與邊的夾角相等？

若給定 $\triangle ABC$，是否存在 P，使得

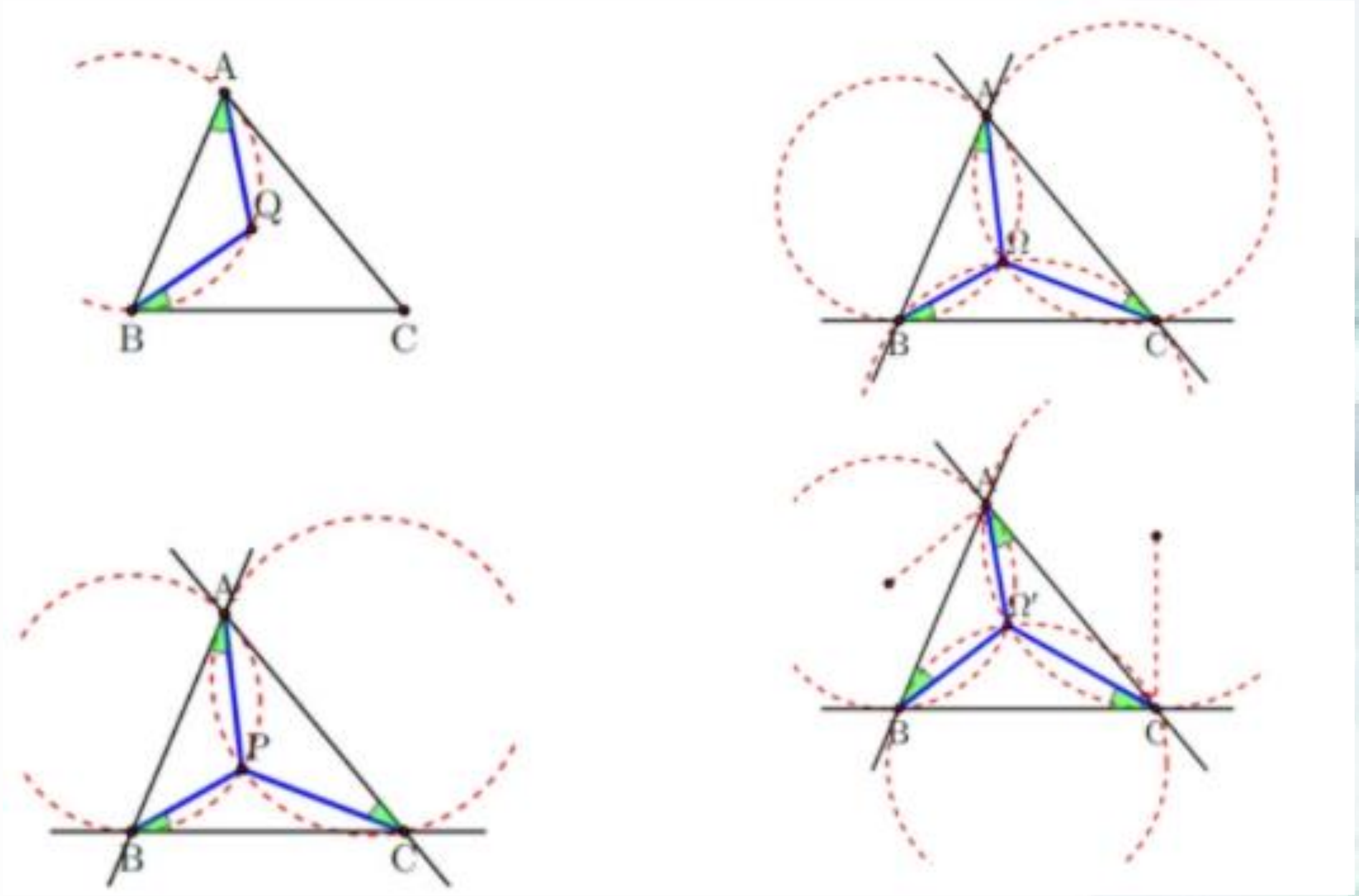
$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \alpha$$



令 $S=a+b+c$

$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C=(a^2+b^2+c^2)/4S$

圖片取自臺灣網路科教館



411031108魏碩廷

050409：

二次曲線上蝴蝶形的探究

得獎名次：(鄉土)教材獎

類別分析：幾何

By:411031106 張心玫

研究動機:

之前在網路上看到全國科展第 55 屆的參展作品：正方形內接蝴蝶形的相關性質與研究（張華恩、吳尚澂、葉承恩，2015），討論蝴蝶定理在正方形內的推廣，引起我們對這方面的興趣。 但在搜尋的過程中，我們發現大部分資料主要在講述蝴蝶形的邊長的特性，並無對面積的討論，因此我們想對蝴蝶形面積進行更進一步的研究。另外，我們以二次曲線為研究主題，運用高中教材裡的圓、橢圓、拋物線與雙曲線作圖，以普通高級中學課程綱要中數學科課程綱要內容為我們推論工具，希望能讓多數高中程度的學生均能了解我們的發現。

411031106 張心玫

研究目的:

一、尋找蝴蝶形中間點位置與蝴蝶線的關係

二、尋找二次曲線上之蝴蝶形面積和角度與座標數值之關係

三、拋物線上蝴蝶形之邊長與yy軸上蝴蝶形中間點之關係

四、尋找拋物線上蝴蝶形兩外邊延長而得的交點與蝴蝶形中間點之關係

五、尋找圓與拋物線之重疊圖形上的對稱蝴蝶形中，特定線段長度與點座標數值之關係

六、尋找拋物線上任意兩點連線與拋物線所圍面積之關係

411031106 張心玫

050415：

在空間坐標遇見皮克

得獎名次：探究精神獎

類別分析：幾何

By:411031128 蔣一豪

研究動機：

在某次數學小考，一道求平面坐標上三角形的面積題目，竟然是用數格子點的方式來求值，上網尋找資料才知道，原來這就是有名的皮克定理。這個極為有趣的性質，讓我們突發奇想，是否空間坐標系中的多面體也有類似的性質，期以用代數或幾何的方式找出立體空間中柱體以及椎體的類皮克定理通式。

411031128 蔣一豪

研究目的:

一、找出空間坐標系中長方體的類皮克定理通式

二、找出空間坐標系中直角柱體的類皮克定理通式

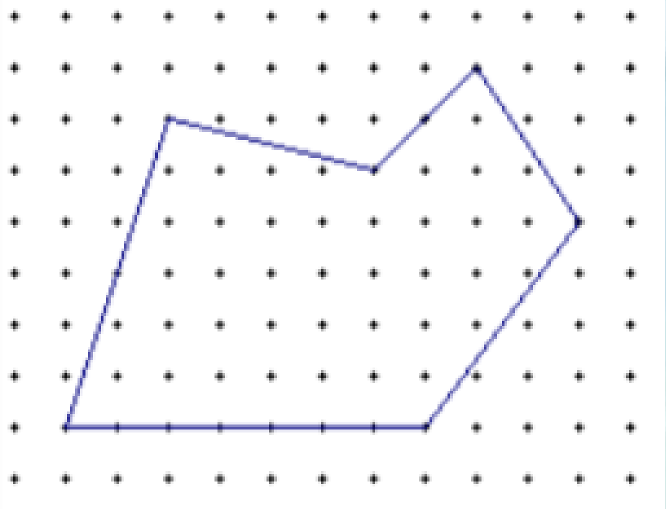
三、找出空間坐標系中直角三角錐體的類皮克定理通式

四、找出空間坐標系中三垂三角錐體的類皮克定理通式

皮克定理:

給定頂點座標均是整點（或正方形格子點）的簡單多邊形，**皮克定理**說明了其面積**A**和內部格點數目i、邊上格點數目的關係:

$A=i+b/2-1$



b=14, i=39, A=45

取自維基百科

411031128 蔣一豪

050416：

一線四心---圓內接多邊形的歐拉線

得獎名次：團隊合作獎

類別分析：幾何

By:411031136 陳筠婷

研究動機:

三角形的歐拉線依序經過其外心、重心、九點圓(或稱歐拉圓)圓心和垂心。這讓我們聯想到此歐拉線是否可以推廣到其它邊數的圓內接多邊形，因此決定以此當作研究題材。

411031136 陳筠婷

研究目的:

本研究的目的在探討並尋找其它圓內接多邊形，看看是否符合：外心、重心、歐拉圓圓心和垂心四點共線的性質，並觀察這四心之間的距離比是否有一定的關係。如果進一步考慮三角形的內心和旁心三角形的外心，看看和三角形的其它心是否有共線的現象？如果有，可否類推到其它雙心多邊形？最後試著利用所定義的多邊形重心、圓內接多邊形的歐拉圓圓心、垂心以及旁心多邊形的外心的性質，證明此結果為真。

411031136 陳筠婷

感謝聆聽！！！

Thank you for listening~