數學思維與解題
(作業1)

第03組

曾湇湞410731248	林亮辰411031107
戴世勳411031102	黃俊穎411031113
潘柏銓411031103	李柔樺411031123

各項作品介紹

作品名稱	變形Chebyshev尋蹤記-連續函數與多倍角公式研究
得獎名次	
研究目的	找出並分類：以下考慮之函數範圍中的多倍角函數。 一、 定義域為ℂ之解析函數 二、定義域為[0, ∞)之連續函數
分析作品	本科展發想自閱讀 A.F.Beardon 所著之 Algebra and Geometry 時，於習題中發現了切 比雪夫多項式的概念。

簡述作品(變形Chebyshev尋蹤記-連續函數與多倍角公式研究)

105年10月，當我在閱讀 A.F.Beardon 所著之 Algebra and Geometry 時，於習題中發現了切比雪夫多項式的概念。切比雪夫多項式T_m為俄國數學家 Pafnuty Chebyshev 所提出，可被以下式子定義：$T_m\,(cos(\theta)) = cos(m\theta)$ 。

例如：$cos(2\theta) = 2cos^2(\theta) - 1$，故$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$cos(3\theta) = 4cos^3\,(\theta) - 3cos(\theta)$，故$T_3(x) = 4x^3 - 3x$，以此類推。

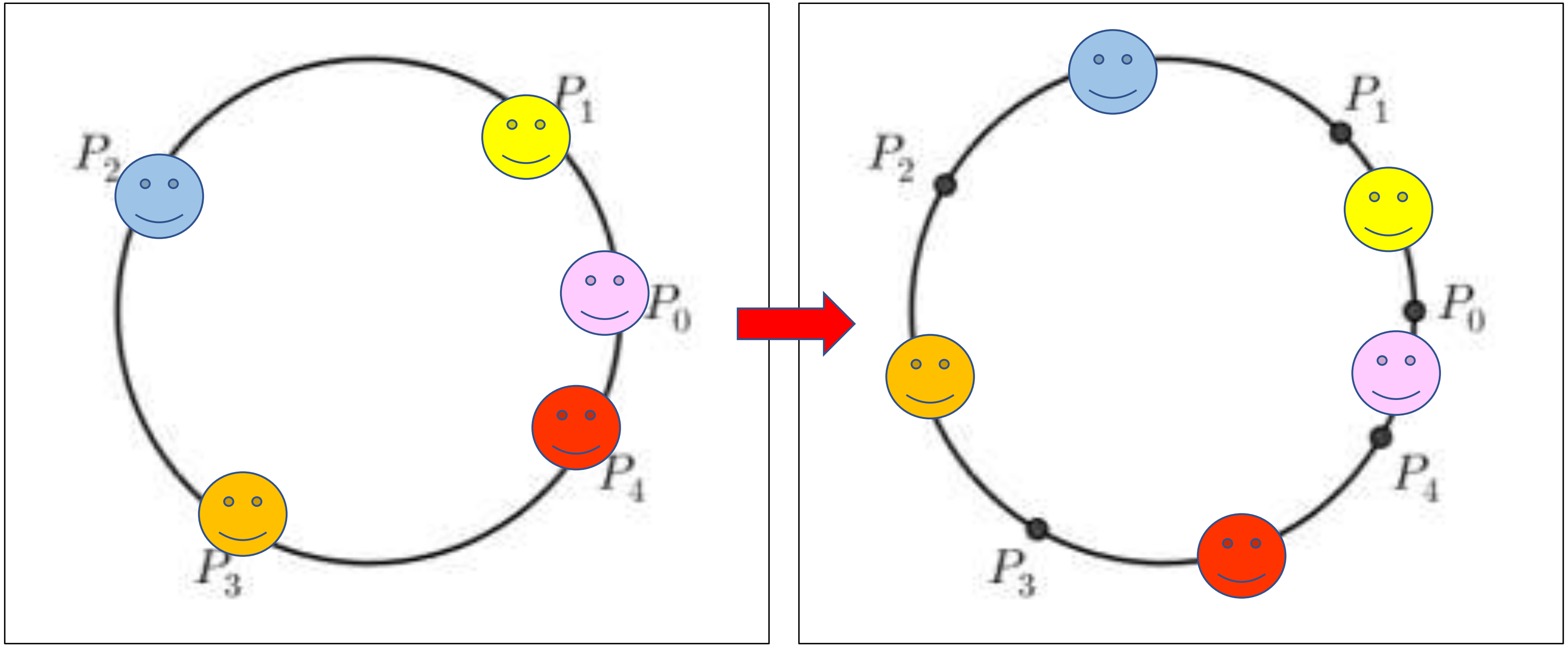
更一般的，對cos而言，任意多倍角公式會以多項式之形式存在，也就是：

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists P(x) \in \mathbb{C}[x]\ s.t.\ f(mx) = P(f(x))$$

看到這題習題後，我開始好奇：對於怎樣的函數會有多項式形式的多倍角公式呢？然而，經過簡單的驗證就可以發現，一般的函數是沒有這種多倍角公式的(比如說$sin(x)$，$sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$，無法寫成$\sin(x)$本身的多項式)。

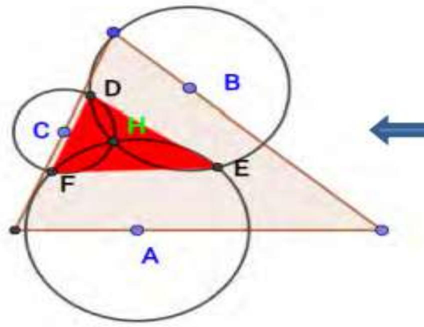
作品名稱	圓周上跳躍回歸問題之研究
得獎名次	
研究目的	一、圓周上相異 n 個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的最小變換數。 二、圓周上相異 n 個點變換成與下一點所成弧之中點，求某點回歸的所有可能變換數。 三、圓周上相異 n 個點變換成與下一點所成弧之 p : q處，求某點回歸的最小變換數。 四、圓周上相異 n 個點變換成與下一點所成弧之 p : q 處，求某點回歸的所有可能變換數。 五、圓周上相異 n 個點在特殊初始位置座標之回歸性質研究。
分析作品	本科展發想自第 27 屆環球城市數學競賽試題：「12 隻蚱蜢處於圓周上 的不同點，牠們將圓周分割成 12 段弧，每步每隻蚱蜢同時沿順時針方向跳到以牠為端點的弧 之中點，得到新的 12 段弧，繼續這樣的跳步，則是否能在 12 步後至少有一隻蚱蜢回到初始 點？」

簡述作品(圓周上跳躍回歸問題之研究)

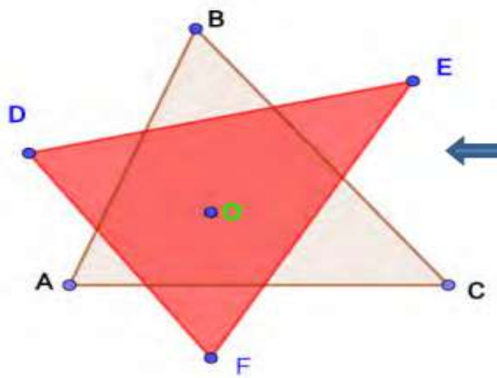


作品名稱	對稱構造多邊形有向面積等面積線探討
得獎名次	
研究目的	一、證明三角形利用對稱方法所構造圖形的等面積線是圓形 二、證明四邊形利用對稱方法所構造圖形的等面積線可能為直線、圓或平面 三、找到對稱構造等面積線是直線的四邊形 四、探討對稱構造 n 邊形的等面積線 五、探討對稱構造 n 邊形等面積線是直線的情形 六、找出等面積線與原圖形性質的關聯性
分析作品	本科展發想自國中所做的數學科展

簡述作品(對稱構造多邊形有向面積等面積線探討)



此圖是國中科展的示意圖，紅色三角形 *DEF* 是構造的面積。以邊上三點 *ABC* 到垂心 *H* 的距離為半徑做三圓，兩相鄰圓的交點 *DEF* 為構造的三角形面積，並探討面積不變量出現情形。

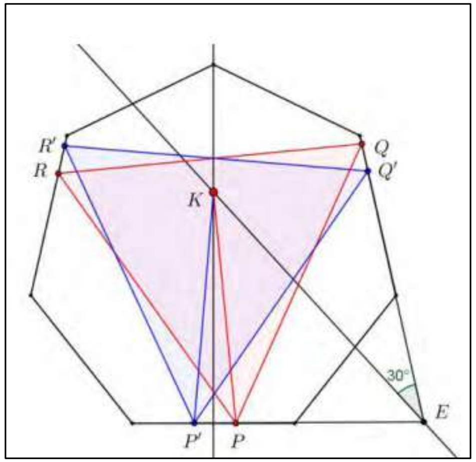


此圖為現在科展所要討論的的構造面積，構造方式為以平面上任意點 *O* 朝三角形 *ABC* 三邊做對稱得點 *DEF*，將 *DEF* 連線所得紅色三角形是本科展所要探討的面積。

作品名稱	正多邊形內接指定內角三角形之研究
得獎名次	
研究目的	一、探討適合本篇研究的「指定內角三角形」之作圖法。 二、探討頂點在三不完全平行且不共點的相異直線上之「指定內角三角形」其定點 K 的存在性。 三、探討任意三角形中「內接指定內角三角形」存在之條件。 四、探討任意三角形中「內接指定內角三角形」之面積極值。 五、探討正 n 邊形中「內接指定內角三角形」之面積極值。
分析作品	本科展發想自中華民國第 54 屆中小學科學展覽高中組作品「探討正 n 邊形的內接正三角形」

簡述作品(對稱構造多邊形有向面積等面積線探討)

中華民國第 54 屆中小學科學展覽高中組作品「探討正 n 邊形的內接正三角形」中提到：正 n 邊形的內接正三角形具有某一定點 K ，且可透過定點 K 作出所有內接正三角形。我們想知道，若將「內接正三角形」改成「內接指定內角三角形」，是否同樣存在有定點 K 呢？可否利用幾何座標明確描述定點 K 的位置呢？此外，所有的內接指定內角三角形中，其面積是否具有最大值或最小值呢？我們展開一連串的研究。



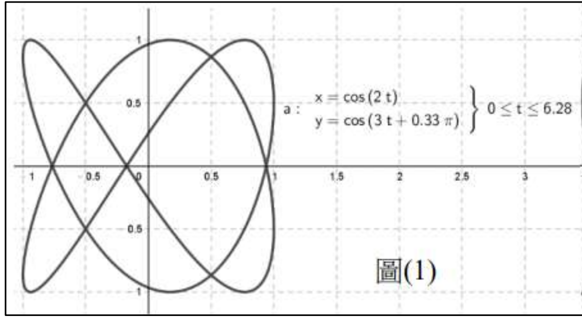
作品名稱	整數分割
得獎名次	
研究目的	一、 解決將 n 顆相同的球放入 3 個相同的箱子裡的方法數。 二、 解決將 n 顆相同的球放入 4 個相同的箱子裡的方法數。 三、 試圖將 m = 3,4 的幾何解法抽象化到一般的 m 並嘗試尋找「是否存在將 n 顆相同的球放入 m 個相同的箱子裡的方法數的公式？」 四、 求得 $f_m(n)$ 各項係數的一般式。 五、 什麼條件下， , $\langle A^k_{m,r} \rangle$會是 k 階等差數列。 六、 $\Delta^i A^k_m$的求法。
分析作品	本科展發想自高一下學期上排列組合時的一道題目：「將 5 顆相同的球放入三個相同的箱子裡，總共 有幾種不同的方法？」

簡述作品(對稱構造多邊形有向面積等面積線探討)

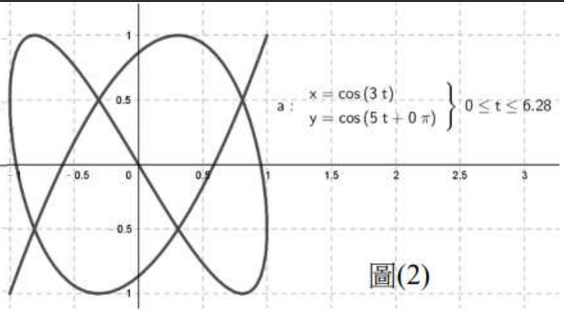
作品名稱	Lissajous的神祕面紗
得獎名次	
研究目的	一、什麼情況下 Lissajous 曲線會是重和的？ 二、Lissajous 曲線的二重點(double point)個數。 三、二維 Lissajous 的連續性質。 四、三維 Lissajous 的性質討論。
分析作品	本科展發想自一本書《數學女孩：圓圓的三角函數》，書中有提到， 兩個互相垂直的三角函數，其產生的軌跡即是利薩如曲線

簡述作品(Lissajous的神祕面紗)

國中時因為想自學三角函數，便買了一本書《數學女孩：圓圓的三角函數》，書中有提到，兩個互相垂直的三角函數，其產生的軌跡即是利薩如曲線，當時就在心中埋下小小的種子。很湊巧的，升高一的暑假作業，是這本書的讀書心得，重新拾起這本書，第二次閱讀，又是另外一番滋味，在我們討論的過程中，也與利薩如曲線有了第二次的相遇，美麗的圖形吸引了我們的目光，這次，我們不滿足於書中給的介紹，便在網路上進行了一些查詢，並一起討論，發現利薩如曲線並不只是肉眼觸目所及的美，又若是三個互相垂直三角函數產生的軌跡呢？其中還有許多奧妙正等待著我們去探索。



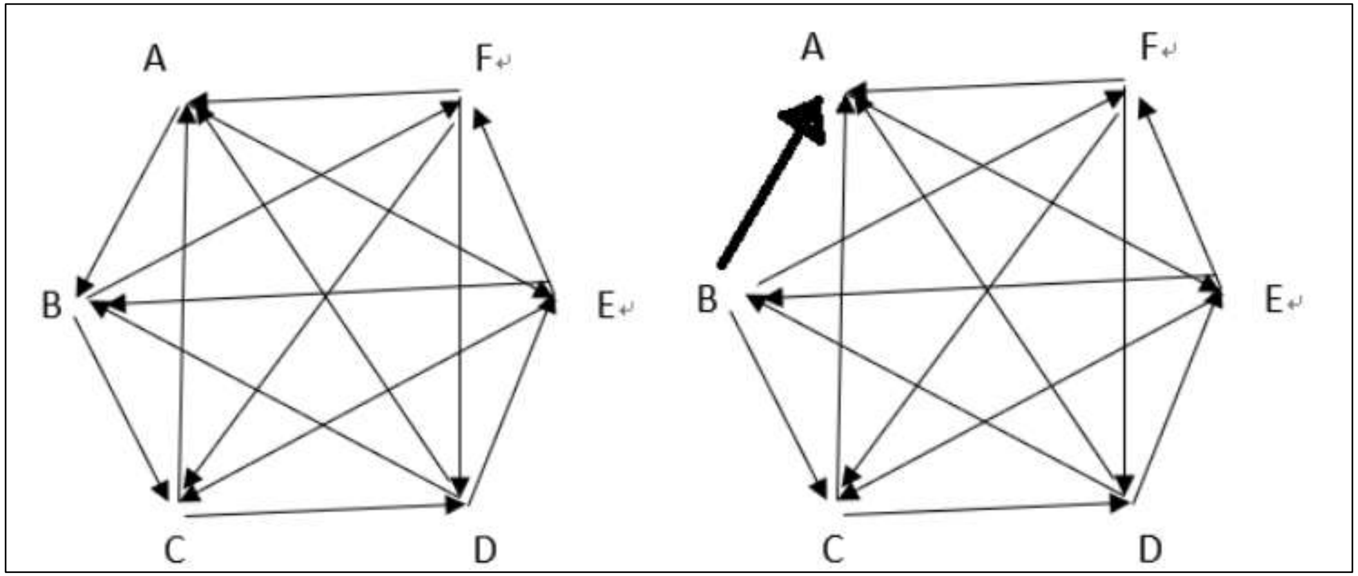
圖(1)



圖(2)

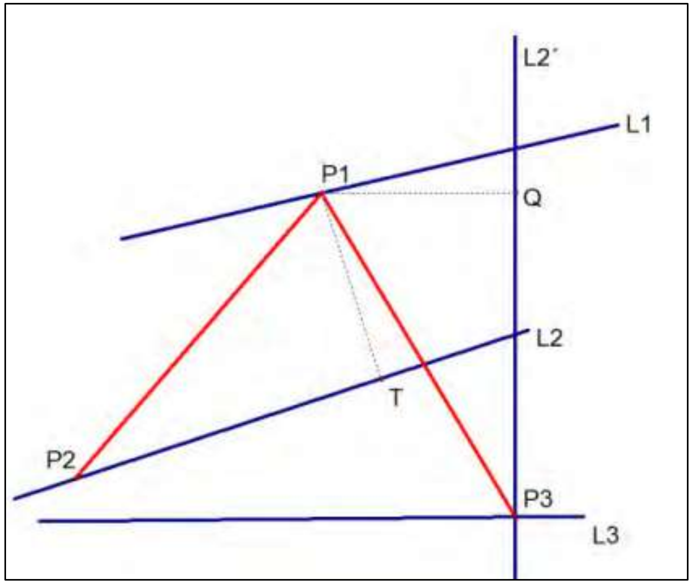
作品名稱	莫忘初衷–競賽圖中的環形多邊形之個數探討
得獎名次	
研究目的	在給定的任意正整數 n 與 m 的條件下(其中$n \ge m$)，求出凸 n 邊形內環形 m 邊形的最大值。
分析作品	本科展發想自數學老師提供的數學研究期刊，其中有一個主題是：在一個凸多邊形中，兩兩用單向的箭頭連起 來，這樣的一張圖中，竟包含了許多環形的路徑。

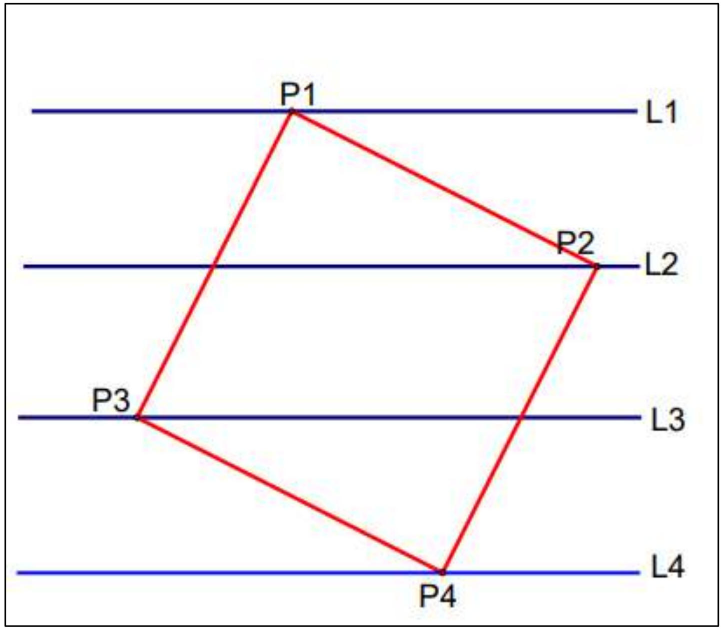
簡述作品(莫忘初衷-競賽圖中的環形多邊形之個數探討)



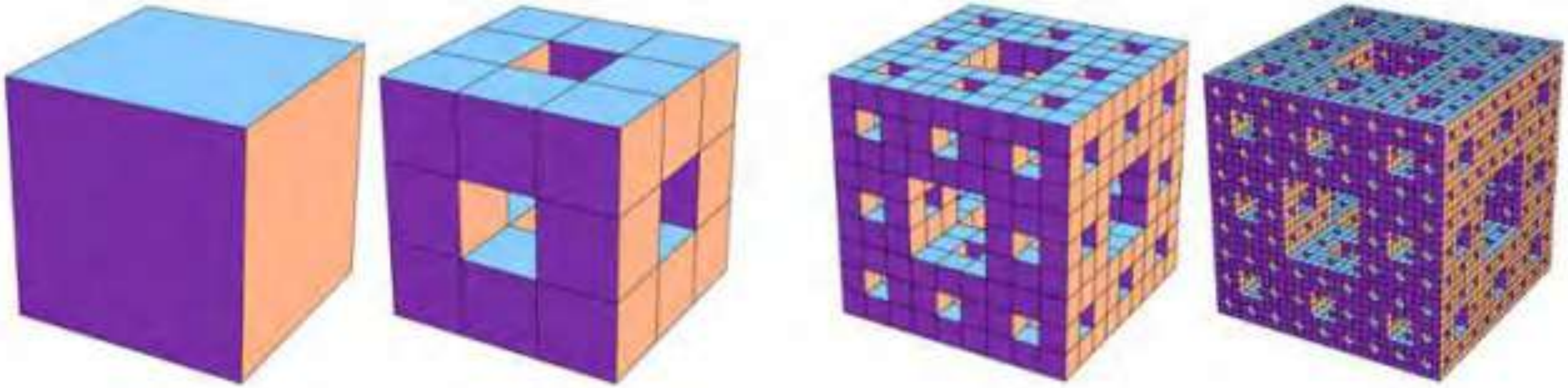
作品名稱	尋找消失的鑲接正n邊形
得獎名次	
研究目的	一、n條平行線鑲接正n邊形作圖法及討論解的情形 二、n條從一點出發的相異射線鑲接正n邊形作圖法及討論解的情形 三、n條交於一點的相異直線鑲接正n邊形作圖法及討論解的情形 四、任意n邊形鑲接正n邊形作圖法及討論解的情形 五、p邊形鑲接正三、四邊形作圖法及討論解的情形
分析作品	本科展發想自練習題：給定三條相異之平行線，作一正三角形，使其三頂點分別落在三條平行線上。

簡述作品(莫忘初衷–競賽圖中的環形多邊形之個數探討)





作品名稱	Menger Sponge點邊面的探討
得獎名次	
研究目的	令 M_n 為第 n 階的門格海綿： 一、針對不同長度的 true edges，求其元素數量 二、針對不同類型的 true faces，求其元素數量 三、針對不同度數的 true vertices，求其元素數量 四、計算 Menger Sponge 的虧格數
分析作品	本科展發想自數列與級數的單元中曾經遇到的問題：『一單位長的正方形，第一次將其平分成 9 塊（九宮格形），然後挖去中間一塊。第二次再將剩餘各小正方形各平分成 9 塊，分別去掉中間各 一塊，之後依此類推（如中下圖所示）。試求執行 n 次後，所刪去掉的面積總量為何？』

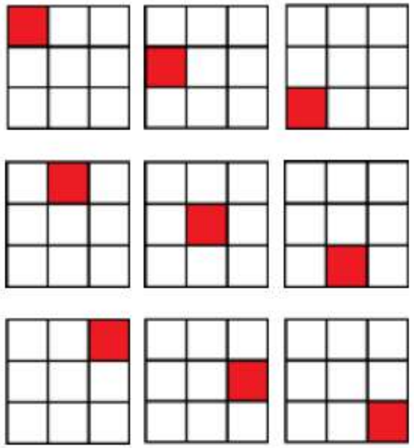


M_0 M_1 M_2 M_3

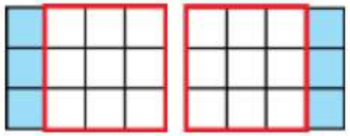
作品名稱	「隔」格不入─阻隔集最小值之性質研究
得獎名次	
研究目的	一、補充詳解中 b(m,n,S_r)及b(m,n,P_r)證明之不足 二、求出 b(m,n,L_r)之值 三、求出 m×n×l三維空間b(m,n,l, S_r') 、b(m,n,l, P_r')及 b(m,n,l, L_r')之值
分析作品	本科展發想自TRML 考古題:在 m×n 棋盤中放置若干阻隔點，使得給定的圖形 A 經任意旋轉翻轉並放入棋盤中，皆會碰到至少一個阻隔點，這些阻隔點所形成的集合稱之為「阻隔集」。而目標是找出最少須放 置幾個阻隔點，即求出阻隔集的最小值。

1. $m=3,n\geq 3$.(只需考慮橫向分布的正方形)

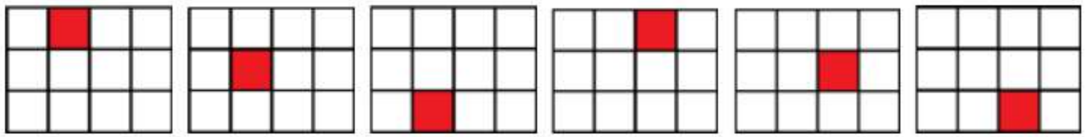
如下圖，$m=3,n=3$時，因為只有一個S_3圖形，所以可放置阻隔點於棋盤中任一格。



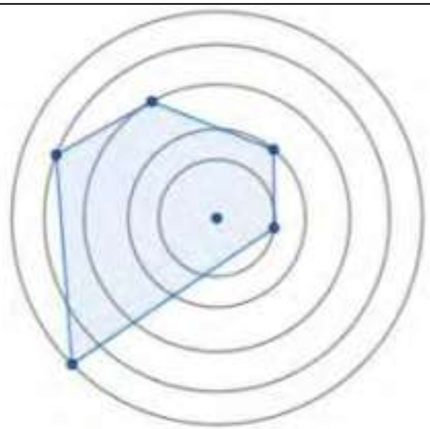
如下圖，$m=3,n=4$時，棋盤中有兩個S_3圖形，若放置阻隔點於$S_{i,1}$或$S_{i,4}$，分別會造成棋盤最右方和最左方的S_3圖形碰不到阻隔點。



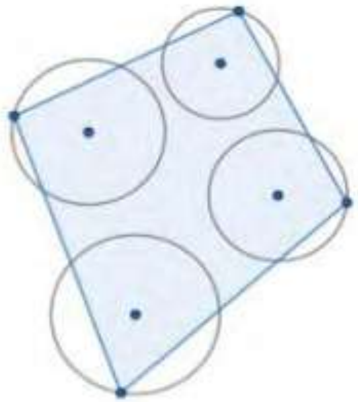
所以會放置阻隔點於$S_{i,2}$或$S_{i,3}$中**任一方格**，所有可能的放置位置如下。



作品名稱	繁星似海－圓上圖形最大值探討
得獎名次	
研究目的	在不同的圓上（半徑不一定要相同且圓不一定要共心）各取一點，再依照順序（順／逆 時針）連接便可繪出一個多邊形，此多邊形會因各點取的位置不同，而有千變萬化的情況。 我們此次的研究目的便是要探討：在畫出的眾多情形裡，有最大周長或最大面積時，此多邊 形會有何性質。
分析作品	本科展發想自第34屆的科展作品：「空間中任三直線上各取一 點所連成三角形的最小周長」



五個同心圓情形



四個不同心圓情形

主要作品詳述

重整勾股─迭代互質畢氏數(佳作)

名詞解釋

- 畢氏數
- 互質畢氏數
- 互質畢氏數家族
- 互質畢氏三元樹
- 費氏規則

又名勾股數
是符合畢氏定理 $a^2+b^2=c^2$
的兩個整數解(a,b,c)

畢氏數中(a,b,c)的最大公因數等於1

由一生成公式產生的$\{(a_n,b_n,c_n)\}$
註：此研究舉例歐幾里得家族。

由$(a_1,b_1,c_1)=(3,4,5)$開始
以母樹藉由代數公式建構
而成的數
此研究舉例
- 貝格倫三元樹
- 普萊斯三元樹
- 菲爾斯托夫三元樹

數列中每一個數字必須是
前兩個數字的和

數學介紹——**迭代**

條件： (1)確定迭代變量

(2)建立迭代關係式

(3)對迭代過程進行控制

動機分析

參加科展接觸
互質畢氏三元樹

參考文獻資料
——費馬三元數

改良普萊斯建立
迭代路徑碼的方法

猜想貝格倫、普萊斯
與菲爾斯托夫三元樹
中所有畢氏數皆相等

費馬三元數

$$(a, b, c) = (4565486027761, 1061652293520, 4687298610289)$$

是符合兩股和（$a + b$）與弦（c）皆為完全平方數條件的最小互質畢氏數

貝格倫三元樹

$$\begin{bmatrix} q & q' \\ p & p' \end{bmatrix}$$

正整數

q', q, p, p'

線性變換

互質畢氏數迭代公式

$$(3,4,5) = (a_1, b_1, c_1)$$

$$\text{(A)} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}; \text{(B)} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}; \text{(C)} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$$

貝格倫三元樹

$$(A)\ \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix};\ (B)\ \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix};\ (C)\ \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$$

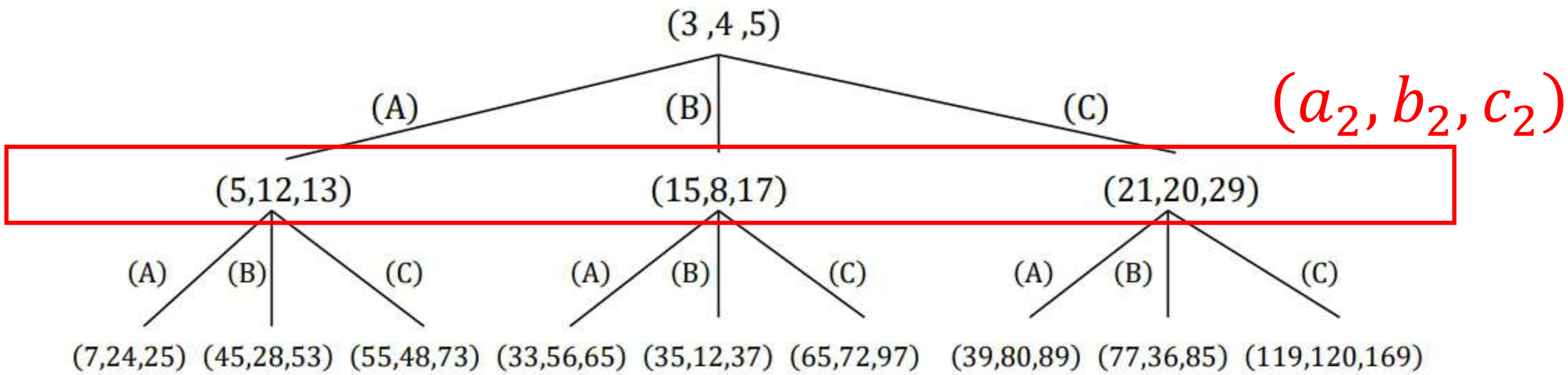


圖 1

迭代路徑碼：CAAACBBBBBBBBBABBCAAAAAAAAAAAAAAAACAACBBB

研究目的

●證明 $P_{Berg} = P_{Eucl}$，並建立 P_{Eucl} 中任意互質畢氏樹在 P_{Ebrg} 的迭代路徑。

●證明 $P_{\mathrm{Pric}} = P_{Eucl}$，並建立 P_{Eucl} 中任意互質畢氏樹在 P_{Pric} 的迭代路徑。

●證明 $P_{Fers} = P_{Eucl}$，並建立 P_{Eucl} 中任意互質畢氏樹在 P_{Fers} 的迭代路徑。

$P_{Eucl} = \{(a_n, b_n, c_n) | (a_n, b_n, c_n)$ 為歐幾里得家族中之數，$n \geq 2$，$(a_1, b_1, c_1) = (3,4,5)\}$

P_{Eucl} 歐幾里得家族

P_{Berg} 貝格倫三元樹

P_{Pric} 普萊斯三元樹

P_{Fers} 菲爾斯托夫三元樹

研究方法

歐幾里得家族生成公式：

$$\left\{\begin{aligned} a_n &= u_n^2 - v_n^2 \\ b_n &= 2u_n\, v_n \quad ,n, u_n, v_n \in \mathrm{N}, u_n > v_n, (u_n, v_n) = 1 \\ c_n &= u_n^2 + v_n^2 \end{aligned}\right\}$$

2階方陣迭代公式：

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

左護法

歐幾里得家族生成公式：

$$\left\{\begin{array}{l} a_n = u_n^2 - v_n^2 \\ b_n = 2u_n v_n \quad , n, u_n, v_n \in \mathrm{N}, u_n > v_n, (u_n, v_n) = 1 \\ c_n = u_n^2 + v_n^2 \end{array}\right\}$$

研究方法

2階方陣迭代公式：

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

右護法

$$(a_1, b_1, c_1) = (3,4,5)$$

(A) $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$

$$(a_2, b_2, c_2) = (5,12,13)$$

$$(a_3, b_3, c_3) = (7,24,25)$$

$$(a_1, b_1, c_1) = (3,4,5)$$

(B) $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$

$$(a_2, b_2, c_2) = (15,8,7)$$

$$(a_3, b_3, c_3) = (35,12,37)$$

$$(a_1, b_1, c_1) = (3,4,5)$$

(C) $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$

$$(a_2, b_2, c_2) = (21,20,29)$$

$$(a_3, b_3, c_3) = (119,120,169)$$

$(u_1, v_1) = (2,1)$
$(u_2, v_2) = (3,2)$
$(u_3, v_3) = (4,3)$

$$\left\{\begin{array}{l} a_n = u_n^2 - v_n^2 \\ b_n = 2u_n v_n \quad , n, u_n, v_n \in \mathrm{N}, u_n > v_n, (u_n, v_n) = 1 \\ c_n = u_n^2 + v_n^2 \end{array}\right\}$$

$(u_1, v_1) = (2,1)$
$(u_2, v_2) = (4,1)$
$(u_3, v_3) = (6,1)$

$(u_1, v_1) = (2,1)$
$(u_2, v_2) = (5,2)$
$(u_3, v_3) = (12,5)$

(A′) $\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

(B′) $\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$

(C′) $\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$

研究方法

由迭代公式(A')與歐幾里得家族的生成公式取代迭代公式(A)

$$(a_n, b_n, c_n) \xrightarrow{A'} (a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$$

互質畢氏數　　　　互質畢氏數

Proof

別忘了我哦~

$$\begin{gathered} u_n, v_n \in \mathbb{N} \\ v_n < u_n \\ (u_n, v_n) = 1 \\ v_n, u_n \text{為一奇一偶} \end{gathered} \xrightarrow[A']{\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}} \begin{gathered} v_{n+1} = u_n \\ u_{n+1} = 2u_n - v_n \end{gathered} \quad \begin{gathered} 2u_n - v_n, u_n \in \mathbb{N} \\ u_n < 2u_n - v_n \\ (2u_n - v_n, u_n) = 1 \\ v_{n+1}, u_{n+1} \text{為一奇一偶} \end{gathered}$$

嗨我又出來了

歐幾里得家族生成公式：

$$\begin{Bmatrix} \begin{cases} a_n = u_n^2 - v_n^2 \\ b_n = 2u_n v_n \\ c_n = u_n^2 + v_n^2 \end{cases}, n, u_n, v_n \in \mathbb{N}, u_n > v_n, (u_n, v_n) = 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow (a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) \text{為互質畢氏數}$$

研究方法

貝格倫三元樹與歐幾里得家族的所有互質畢氏數相等

$P_{Eucl} \subseteq P_{Berg}$

(1) 令$(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1}) \in \mathrm{P_{Eucl}}$，則$u_{n+1},v_{n+1} \in N$，$v_{n+1} < u_{n+1}$，$(u_{n+1},v_{n+1}) = 1$且$u_{n+1},v_{n+1}$為一奇一偶。因此，$u_{n+1}$與$v_{n+1}$的大小關係可分成$\frac{u_{n+1}}{2} = v_{n+1}$，$\frac{u_{n+1}}{2} < v_{n+1} < u_{n+1}$，$\frac{u_{n+1}}{3} < v_{n+1} < \frac{u_{n+1}}{2}$ 以及$0 < v_{n+1} < \frac{u_{n+1}}{3}$。

(2) 當 $\frac{u_{n+1}}{2} = v_{n+1}$時，則$(u_{n+1},v_{n+1}) = (2,1)$；當 $\frac{u_{n+1}}{2} < v_{n+1} < u_{n+1}$時，選擇迭代公式(A′)並且迭代產生$(u_n,v_n)$；當$0 < v_{n+1} < \frac{u_{n+1}}{3}$時，選擇迭代公式(B′)並且迭代產生$(u_n,v_n)$；當 $\frac{u_{n+1}}{3} < v_{n+1} < \frac{u_{n+1}}{2}$ 時，選擇迭代公式(C′)並且迭代產生(u_n,v_n)。因此由貝格倫三元樹可得到圖 4。

(3) 按照u_{n+1}與v_{n+1}的關係選擇迭代公式(A′)、(B′)或(C′)產生(u_n,v_n)，由第 7 至 10 頁之論證可證得$u_n,v_n \in N$，$v_n < u_n$，$(u_n,v_n) = 1$，u_n,v_n為一奇一偶。因此$(a_n,b_n,c_n) \in \mathrm{P_{Eucl}}$。

(4) 同理，(a_n,b_n,c_n)可產生$(a_{n-1},b_{n-1},c_{n-1})$，且可證得$(a_{n-1},b_{n-1},c_{n-1}) \in \mathrm{P_{Eucl}}$。

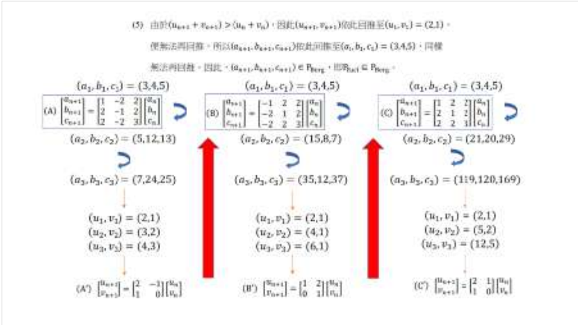
(5) 由於$(u_{n+1}+v_{n+1}) > (u_n+v_n)$，因此$(u_{n+1},v_{n+1})$依此回推至$(u_1,v_1) = (2,1)$，便無法再回推，所以$(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1})$依此回推至$(a_1,b_1,c_1) = (3,4,5)$，同樣無法再回推。因此，$(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1}) \in \mathrm{P_{Berg}}$，即$\mathrm{P_{Eucl}} \subseteq \mathrm{P_{Berg}}$。

$P_{Berg} \subseteq P_{Eucl}$

(1) 對任一$(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1}) \in \mathrm{P_{Berg}}$而言，存在一個長度為$n$的貝格倫路徑碼，為敘述方便起見，不失一般性，假設$\overbrace{\mathrm{AABBBCCCC \cdots ABC}}^{n}$使得$(a_1,b_1,c_1) = (3,4,5)$經過迭代公式(A)(A)(B)(B)(B)(C)(C)(C)(C)⋯(A)(B)(C)產生$(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1})$。

(2) 因為迭代公式(A)唯一決定迭代公式(A′)，迭代公式(B)唯一決定迭代公式(B′)迭代公式(C)唯一決定迭代公式(C′)，所以路徑碼$\overbrace{\mathrm{AABBBCCCC \cdots ABC}}^{n}$唯一決定路徑碼$\overbrace{\mathrm{A'A'B'B'B'C'C'C'C' \cdots A'B'C'}}^{n}$。

(3) $(u_1,v_1) = (2,1)$由路徑碼$\overbrace{\mathrm{A'A'B'B'B'C'C'C'C' \cdots A'B'C'}}^{n}$迭代產生$(u_{n+1},v_{n+1})$，由第 7 至 10 頁之論證可證得$u_{n+1},v_{n+1} \in N$，$v_{n+1} < u_{n+1}$，$(u_{n+1},v_{n+1}) = 1$且$u_{n+1},v_{n+1}$為一奇一偶。因此，$(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1}) \in \mathrm{P_{Eucl}}$且$(a_1,b_1,c_1) \in \mathrm{P_{Eucl}}$，即$\mathrm{P_{Berg}} \subseteq \mathrm{P_{Eucl}}$。



(3) $(u_1,v_1)=(2,1)$由路徑碼$\overline{A'A'B'B'B'C'C'C'C'\cdots A'B'C'}$迭代產生$(u_{n+1},v_{n+1})$，由第 7 至 10 頁之論證可證得$u_{n+1},v_{n+1}\in N$，$v_{n+1}<u_{n+1}$，$(u_{n+1},v_{n+1})=1$且$u_{n+1},v_{n+1}$為一奇一偶。因此，$(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1})\in P_{Eucl}$且$(a_1,b_1,c_1)\in P_{Eucl}$，即$P_{Berg}\subseteq P_{Eucl}$。

Proof

$(u_n,v_n)=(2,1)$ $\xrightarrow{\text{路徑碼}}$ v_{n+1}, u_{n+1} $\longrightarrow$

$u_{n+1},v_{n+1}\in\mathbb{N}$

$u_{n+1}>v_{n+1}$

$(u_{n+1},v_{n+1})=1$

v_{n+1},u_{n+1}為一奇一偶

$$\Rightarrow (a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1})\epsilon P_{Eucl}\text{且}(a_1,b_1,c_1)\epsilon P_{Eucl}$$

研究結果

1.建立迭代公式(A′)、(B′)、(C′)：

(A′) $\begin{bmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_n\\v_n\end{bmatrix}$ (B′) $\begin{bmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_n\\v_n\end{bmatrix}$ (C′) $\begin{bmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_n\\v_n\end{bmatrix}$

2.證明出貝格倫三元樹中所有的互質畢氏數等於歐幾里得家族中所有的互質畢氏數。

$$P_{\mathrm{Eucl}}\subseteq P_{Berg}$$

$$P_{Berg}\subseteq P_{\mathrm{Eucl}}$$

(5) 由於$(u_{n+1}+v_{n+1})>(u_n+v_n)$，因此$(u_{n+1},v_{n+1})$依此回推至$(u_1,v_1)=(2,1)$，便無法再回推，所以$(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1})$依此回推至$(a_1,b_1,c_1)=(3,4,5)$，同樣無法再回推。因此，$(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1})\in \mathrm{P_{Berg}}$，即$\mathrm{P_{Eucl}}\sqsubseteq \mathrm{P_{Berg}}$。

$$(a_1,b_1,c_1)=(3,4,5)$$

$$\boxed{(\mathrm{A})\ \begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix}}$$

$$(a_2,b_2,c_2)=(5,12,13)$$

$$(a_3,b_3,c_3)=(7,24,25)$$

$$(u_1,v_1)=(2,1)$$
$$(u_2,v_2)=(3,2)$$
$$(u_3,v_3)=(4,3)$$

$$(\mathrm{A'})\ \begin{bmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_n\\v_n\end{bmatrix}$$

$$(a_1,b_1,c_1)=(3,4,5)$$

$$\boxed{(\mathrm{B})\ \begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&2\\-2&1&2\\-2&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix}}$$

$$(a_2,b_2,c_2)=(15,8,7)$$

$$(a_3,b_3,c_3)=(35,12,37)$$

$$(u_1,v_1)=(2,1)$$
$$(u_2,v_2)=(4,1)$$
$$(u_3,v_3)=(6,1)$$

$$(\mathrm{B'})\ \begin{bmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_n\\v_n\end{bmatrix}$$

$$(a_1,b_1,c_1)=(3,4,5)$$

$$\boxed{(\mathrm{C})\ \begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\\c_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{bmatrix}}$$

$$(a_2,b_2,c_2)=(21,20,29)$$

$$(a_3,b_3,c_3)=(119,120,169)$$

$$(u_1,v_1)=(2,1)$$
$$(u_2,v_2)=(5,2)$$
$$(u_3,v_3)=(12,5)$$

$$(\mathrm{C'})\ \begin{bmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_n\\v_n\end{bmatrix}$$

(3) $(u_1,v_1)=(2,1)$由路徑碼$\overbrace{\mathrm{A'A'B'B'B'C'C'C'C'}\cdots\mathrm{A'B'C'}}^{n}$迭代產生$(u_{n+1},v_{n+1})$，由第 7 至 10 頁之論證可證得$u_{n+1},v_{n+1}\in N$，$v_{n+1}<u_{n+1}$，$(u_{n+1},v_{n+1})=1$且$u_{n+1},v_{n+1}$為一奇一偶。因此，$(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1})\in \mathrm{P_{Eucl}}$且$(a_1,b_1,c_1)\in \mathrm{P_{Eucl}}$，即$\mathrm{P_{Berg}}\sqsubseteq \mathrm{P_{Eucl}}$。

Proof

$$(u_n,v_n)=(2,1)\xrightarrow{\text{路徑碼}}\begin{matrix}v_{n+1}\\ u_{n+1}\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}u_{n+1},v_{n+1}\in\mathbb{N}\\ u_{n+1}>v_{n+1}\\ (u_{n+1},v_{n+1})=1\\ v_{n+1},u_{n+1}\text{為一奇一偶}\end{matrix}$$

$$\Rightarrow(a_{n+1},b_{n+1},c_{n+1})\epsilon P_{Eucl}\text{且}(a_1,b_1,c_1)\epsilon P_{Eucl}$$

研究結果

1.建立迭代公式(A‘)、(B’)、(C‘)：

(A′) $\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$ (B′) $\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$ (C′) $\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$

2.證明出貝格倫三元樹中所有的互質畢氏數等於歐幾里得家族中所有的互質畢氏數。

$$P_{\mathrm{E}ucl} \subseteq P_{Berg}$$

$$P_{Berg} \subseteq P_{\mathrm{E}ucl}$$

研究結果

3.歐幾里得家族中任一互質畢氏數在貝格倫三元樹的迭代路徑

$(u_n, v_n) \longleftarrow (a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) \epsilon P_{Eucl}$

公式	u_n, v_n的性質	u_{n+1}, v_{n+1}的性質
(A′)	$0 < v_n < u_n$，u_n, v_n為一奇一偶	$\frac{u_{n+1}}{2} < v_{n+1} < u_{n+1}$，$u_{n+1}, v_{n+1}$為一奇一偶
(B′)	$0 < v_n < u_n$，u_n, v_n為一奇一偶	$0 < v_{n+1} < \frac{u_{n+1}}{3}$，$u_{n+1}, v_{n+1}$為一奇一偶
(C′)	$0 < v_n < u_n$，u_n, v_n為一奇一偶	$\frac{u_{n+1}}{3} < v_{n+1} < \frac{u_{n+1}}{2}$，$u_{n+1}, v_{n+1}$為一奇一偶

$(u_1, v_1) = (2,1) \longleftarrow\longleftarrow\longleftarrow (u_{n-1}, v_{n-1}) \longleftarrow (u_n, v_n)$

結論

1.找到2階方陣的迭代公式。

2.證明貝格倫三元樹、普萊斯三元樹與菲爾斯托夫三元樹中所有的互質畢氏數相等。

3.建立迭代路徑。

4.期望將互質畢氏數的路徑碼運用於密碼學。

第03組

曾湇湞410731248
戴世勳411031102
潘柏銓411031103
林亮辰411031107
黃俊穎411031113
李柔樺411031123

------第一部分-----
曾湇湞
各項作品介紹
PPT

------第二部分-----
林亮辰
名詞解釋
迭代

李柔樺
動機分析
貝格倫三元樹
研究目的
PPT(架構、資訊)

黃俊穎
研究方法(一)
研究方法(二)

戴世勳
研究方法(三)
研究結果
PTT(動畫、編排、製作)

潘柏銓
(大綱)
結論