全國中小學科展歷屆得獎作品-57屆

第四組 組員

410931217 數二乙 林宜加	410831222 數三乙 許光碩
411031115 數一甲 蘇勇齊	411031105 數一甲 梁順維
410931144 數二甲 藍立翔	410831108 數三甲 黃暐傑

第一名

道同互相為「蒙」
-蒙日定理共點共線共圓的問題探討與推廣

- 研究動機:

　在探討「Monge’s theorem 的性質探討與推廣」的前置研究中，礙於有問題尚未完成與發 表篇幅有限，本研究將延續並進一步探討未觸及的問題，其中包含蒙日點位置與各圓半徑、 座標的幾何量關係，以及探討 n 圓中各蒙日點間的關係，並試圖 定義「蒙日圓」的作法以將 蒙日線與廣義蒙日點定理也推廣至 n 圓情形。

- 研究目的:

　本研究目的試圖將三圓中的蒙日定理推廣至 n個圓、球、多邊形及多面體 等位似圖形的情 形，並探討其中相關的性質，問題如下：（一）探討平面上四圓、五圓以至 n個圓中蒙日點的相關性質與推廣。（二）探討平面上代表 n個圓的蒙日圓，其存在性及相關性質。（三）試圖將上述性質推廣至空間中的球體。（四）試圖將上述性質推廣至多邊形與多面體等位似圖形 。

第二名

百轉千迴繞曲線
-費氏螺線推廣 k 階數列曲線之探討

研究動機:

在 13 世紀初，義大利數學家費波那契 (Fibonacci) 所著《算盤書》一書中談到兔子的生長問題，可用二階遞迴關係來描述如下

後人寫成數列形式為0,1,1, 2, 3, 5, 8,……., 稱為費氏數列(Fibonacci sequence)，此數列也表現了自然界生物的許多生長現象，如：鳳梨、向日葵、松果以及鸚鵡螺。在本研究中，我們從費氏螺線的有趣又完美性質推廣至k 階齊次線性遞迴數列相應的各種曲線，過程中我們配合高中數學課程中學過的重要概念「數列與級數」、「多項式函數」、「直線與圓」、「極限與函數」、「多項式函數的微積分」等單元來解決研究的問題。

研究目的:

一、依照費氏螺線的樣式，建構推廣費氏矩形及費氏螺線 。二、探討k 階遞迴關係中係數在何種條件下，形成推廣費氏螺線或非螺線的性質。 三、在 k 階齊次線性遞迴數列中，探討後前項極限比與其特徵方程式的實根之性質，再論證 出形成螺線以及非螺線的充分條件。 四、建構k 階齊次線性遞迴數列相應的曲線，並且將曲線解釋成大自然的圖像。

第三名
閃爍燈之循環性質研究與探討

研究動機:

第 23 屆環球城市數學競賽試題中，有一個關於閃爍燈問題:「將n盞燈排成一列，最初將其中某些燈點亮，在以後的每次操作，將上一次未亮且其旁邊僅有一盞燈是亮著的燈點亮，同時將原來已亮的燈熄滅。試問對什麼樣的n，可以找到一種亮燈的方式，使得無論操作幾次，在每一次操作後，至少都有一盞燈是亮著的。」由於n 盞燈的亮燈方式共2 n 種，若n 盞 燈永不全滅，必定會產生循環。我們對於其循環性質感到好奇，便展開一連串的研究。

研究目的:

一、探討n個燈直線排列的循環性質。二、探討n個燈環狀排列的循環性質。三、探討m n個燈矩陣排列的循環性質。四、探討m n l 個燈三維陣列排列的循環性質。五、改變操作規則，並探討各種排列之循環性質。

第三名
巴斯卡三角形對質數同餘性質探討

研究動機:

我們曾經看過一個數奧問題: n是一個正整數, $n+1$個正整數$C_0^n, C_1^n, C_2^n, \cdots, C_{n-1}^n, C_n^n$中, 除以 5 餘$j(1 \le j \le 4)$的個數用 r_j表示, 求證$r_1 + r_4 \ge r_2 + r_3$。這題的答案用數學歸納法證明。(數學奧林匹亞大集新編) 但我們好奇是否能將r_1, r_2, r_3, r_4分別的數值求出, 於是開始對類似的問題進行探討。

研究目的:

本文主要探討組合數對一質數p同餘的性質: 一、給定一組合數C_m^n對p同餘, 若不整除, 餘數為多少?若整除, 含有幾次的質因數? 二、探討同餘後的巴斯卡三角形的特性。三、n 是一個正整數, 第 n 列巴斯卡三角形$C_0^n, C_1^n, \cdots, C_{n-1}^n, C_n^n$中, 除以$p$餘j $(0 \le j < p)$的 個數用r_j表示, r_j各別的數值為何? 四、探討在比 5 更大的質數中, 是否亦存在與原題目類似的r_j數量大小關係。

第三名
永恆的旋轉木馬

研究動機:

起初在練習競賽題:「橢圓的兩垂直焦點弦被焦點所分成的四段線段長的倒數平方和為定值。」我們在解題過程中感受到了很大的興趣，便開始思考這題目的各種變化，從四條線 到 n 條，甚至到倒數 m 次方和。此外我們利用極座標認識了更多有趣的曲線，更 利用 GeoGebra 畫出令人驚豔的 3D 模擬圖，激發進一步研究的好奇心。

研究目的:

一、固定圓錐曲線方程式的情況下，以焦點為旋轉中心，則 n 條相鄰等角焦半徑經任意旋轉時的倒數 m 次方和為定值，其中 n m n m ，，。二、固定圓錐曲線方程式的情況下，以其內任意一點為旋轉中心，則過此點的 n 條相鄰等 角割線段經任意旋轉時的倒數m 次方和為定值，其中 n m n m ，，為偶數。三、在空間中，固定特殊橢圓、拋物、雙曲曲面方程式的情況下，以焦點為旋轉中心，則此焦點向正 N 面體的各頂點做射線交曲面的各線段之倒數m 次方和為定值。四、在空間中，任意正多面體之頂點到任意點、線、面之距離 m 次方和為定值。

最佳創意獎

讓牛頓步上尋根的階梯 —複係數多項方程式的求解與推廣

研究動機:

高中數學課程中，我們使用勘根定理、虛根成對等方法來找出實係數多項方程式的解。但當係數中包含虛數時，上述幾種方法就不適用了，所以我們著手尋找解複係數多項方程式的方法。我們在<數學傳播>月刊中看見了與所學完全不同的方法，這個方法的圖示如栽種植物般，將大籬笆放在培養皿上，然後栽種尋根的種子……，而n個新芽長出n條藤，並四處攀援，最後向上尋根。我們對此方法十分有興趣，於是將它做為我們專題研究的主題。

研究目的:

一、以庫恩植物栽培法為依據，並限制尋根之規則，期能較迅速逼近複係數方程式的零點。二、證明尋根方法的理論依據。三、比較牛頓法與階梯法及其他方法的優缺點，並尋找更實在好用的方法。

最佳鄉土教材獎
即瘋解的情形探討

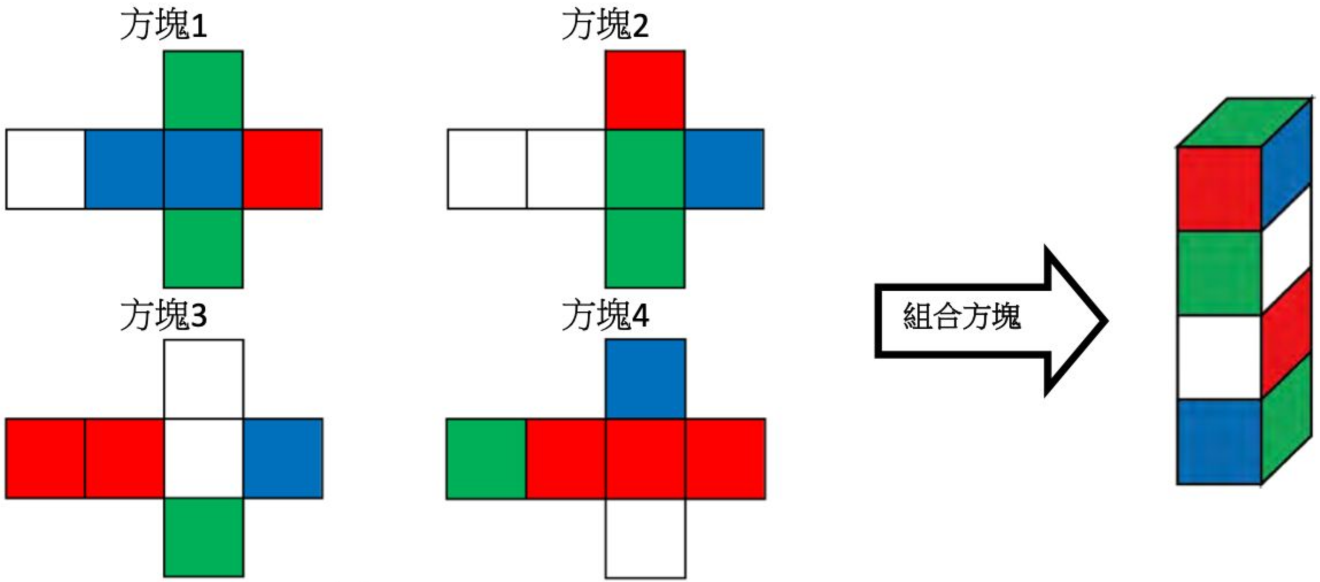
研究動機:

今年學校的暑假作業出了一個有趣的數學遊戲，名為「立即瘋」。這個遊戲的內容如下：「立即瘋」是一種在北美洲相當受歡迎的益智遊戲。這遊戲的器材是由四塊立方體（正六面體）組成，每塊立方體分別有紅、白、藍、綠四種顏色，但每塊立方體顏色的分佈並不相同，其展開圖如圖(1-1)。而玩這種遊戲的目標是把四塊立方體疊成柱形(四塊立方體的 順序沒有限制)，一個疊在一個上面，使柱子的四個側面，都恰有紅、白、藍、綠四種顏色,這是個很具挑戰性的問題！方塊 1 方塊2 方塊3 方塊4 圖(1-1) 這個遊戲看似簡單，但經過實際排列後卻發現並不容易找出答案(真的快瘋了！)，因此 我們透過樹狀圖分析來找出答案，且結果只有一組解。之後老師介紹我們可利用點線圖來解決這類的問題，這讓我們覺得既驚訝又佩服這樣的解題方式。心想：組合方塊 2 如果改變紅、白、藍、綠四種顏色的塗色情形，其結果也一定有解嗎？想到這裡不由得激起我們對這個問題的好奇心，因此想透過高中課本「排列組合」單元 中，學習到的分類討論方式來研究「立即瘋」遊戲的進一步探討，並找出其中的規則。

研究目的:

在同一個方塊的六個面中，塗上紅、白、藍、綠四種顏色(每個面只塗上一種顏色)，若存在任一個顏色出現三個面時，我們以 S 表示，則 4S 表示四個方塊均為 S；若存在相異兩個 顏色各出現兩個面時，我們以T 表示，則 4T 表示四個方塊均為 T。因此，本研究主要探討的問題是：在「立即瘋」遊戲的規則下，針對紅、白、藍、綠四種顏色的分佈為4S 及 4T 的情形，探討是否有其對應解。

「立即瘋」是一種在北美洲相當受歡迎的益智遊戲。這遊戲的器材是由四塊立方體（正六面體）組成，每塊立方體分別有紅、白、藍、綠四種顏色，但每塊立方體顏色的分佈並不相同，其展開圖如圖(1-1)。而玩這種遊戲的目標是把四塊立方體疊成柱形(四塊立方體的順序沒有限制)，一個疊在一個上面，使柱子的四個側面，都恰有紅、白、藍、綠四種顏色，這是個很具挑戰性的問題！



圖(1-1)

佳作
再探勾股鐵路網

研究動機:

準備全國科展時，我接觸第 47屆全國科展高中組數學科第三名的「勾股鐵路網」。作者探討高中課程有關的數列，由整數數列　產生股差為定值的素勾股數家族（王重臻〔 2〕）。因此，我在科展中以最簡真分數數列 產生股差為定 值的素勾股數家族。雖然「勾股鐵路網」的作者發現「最簡股差皆可寫成 $|8k \pm 1|$的形式， $k \in Z$」〔2〕，但是沒有對此提出證　明，更無法從正整數直接挑出最簡股差。所以，我在中研院數學傳播季刊的文章中證明「勾股鐵路網」的發現，並提出最簡勾股差判別方法為「最簡股差的所有因數皆可寫成　 $|8k \pm 1|$的形式， $k \in Z$」。基於下列理由，我想要在此次科展中繼續探討「勾股鐵路網」：一、我在數學傳播文章中尚未證明最簡股差的判別方法，後來我在張文忠「基礎數論原理及題解」書中找到證明最簡股差判別方法的一些線索（張文忠〔 3〕）。二、「勾股鐵路網」作品是藉由其中一條整數數列的衍生數對與構造式，作者找到共軛式與共軛數對，再由共軛數對可 產生另一條整數數列，接著藉由不同最簡股差　的構造式或共軛式之乘積 產生合成最簡股差之構造式，並由此 產生合成最簡股差的所有整數數列〔2〕。我想採取比較簡便的方法，利用最簡股差的乘積　產生關係式，再將不同最簡股差的最簡真分數分別代入關係式，由此求得各種最簡股差的 所有最簡真分數數列。 1 三、我發現「勾股鐵路網」作品有座標表示的問題，作者將各種最簡股差的整數數列　 擺在一起成了「勾股鐵路網」〔 2〕，可是在直線座標中這些整數數列並無法呈現數　列網的形式（圖 1）。因此，我想到平面與空間的方法：將 (u_n, v_n)當成平面座標 (x, y)， 由此建構成平面座標中的「勾股鐵路網」，以及將素勾股數 (a_n, b_n, c_n)當成空間座 標(x, y, z)，由此構成空間座標中的「勾股鐵路網」。 圖1 第47屆全國科展「勾股鐵路網」的整數數列

研究目的:

一、證明最簡股差的判別方法。二、合成各種股差的最簡真分數數列。三、建立平面座標與空間座標中的「勾股鐵路網」

佳作
球球相扣—球內接正多面體的定 值問題探討

研究動機:

在專題課時老師介紹了一篇第五十屆科展的文章(許勝傑[1]), 文章後留下一個定值的問 題: 以 O 為圓心, 作同心圓 C C 1 2 、, 半徑分別為 R R 1 2 、, 並作圓 C1 的內接正五邊形 A A 1 5, 再以圓 C2 上一動點 P 為圓心作圓 C3, 半徑為 r, 再作圓 C3 內接正五邊形 B B 1 5, 則兩正五 邊形各頂點距離二次、四次、六次、八次方和恆為定值。在教授的評語中有提到可以用複數幾何或其他幾何工具來處理部分結果。無意間我們發現另一個幾何工具「向量」, 它能將原本複雜的複數幾何算式, 透過向量的運算讓式子變得精簡, 也更能有效的解決問題, 並可將平面上大部分的結果推廣到空間中, 於是我們就改用向量的概念嘗試處理問題。

研究目的:

找出圓上一動點 P 與其內接正 n 邊形之各頂點所衍生的定值之公式, 並將部分結果推廣到空間中的正多面體。

佳作
面積最大值定點

研究動機:

在專題研究的課程中，老師給我們第十三屆 JHMC 國中數學競賽中，個人賽第四回第 7 題的題目：「直線 4 8 3 y x 與 x、y 軸分別交於 A、B 兩點，動點 P、Q 分別從原點 O 同時 出發，P 點以每秒 2 單位的速率沿著 OAB 的邊界逆時針運動，Q 點沿著 OAB 的邊界順時 針以每秒 1 單位的速率運動，一直到 P、Q 兩點移動到 B 點相遇時就停止。試問 P、Q 的運動過程中，面積的最大 值為 。」當我們將 P 點的速率改為每秒 1 單位或 3 單位時，發現其面積最大 值與速率 v 成反比， 當面積達最大時，P 點位置竟然不受速率 v 的影響，這樣特殊的點，我們稱它為面積最大 值定點，或簡稱為定點。這是一道簡單又有趣的題目，經網路 查詢之後，無相關的文獻資料。 於是，我們就以「面積最大 值定點」為題目，開始我們的研究。

研究目的:

一、在直角 OAB 中，探討 P 點在不同速率下，於 P、Q 兩點相遇之前， OPQ 面積的最大值、此時 P、Q 的坐標及其幾何意義。 二、在一般 OAB 中，探討 P 點在不同速率下，於 P、Q 兩點相遇之前， OPQ 面積的最大值、此時 P、Q 的坐標及其幾何意義。 三、在任意 OAB 中，以速率 v 為變數，探討最大面積函數 F (v)的圖形，並且比較其差異性。 四、在正 n 邊形中，n = 4、5、6、8，探討 P 點在不同速率下，於 P、Q 兩點相遇之前， OPQ 面積的最大值、此時 P、Q 的坐標及其幾何意義。

佳作
數的循環

研究動機:

有一天，我們翻閱第三十五屆的全國數學科展，證明了一個有趣的問題：方塊數論（如附件 A）。藉此我們想深入推廣，繼續研究下面這個問題：任意 n 個正整數之數列(n>1) 其相鄰兩數相減之絕對值形成一新數列，重複這個"運算"，欲證明此"運算"的數列具有「循環性」，並找出其循環節次。

研究目的:

一、設計電腦程式來實驗任意n 個正整數(n＞1)之數列依此"運算"是否具有循環性。(一) 任意 n 個正整數之數列依此"運算"是否具有循環性。二、理論證明 (二) 任意 n 個正整數之數列依此"運算"，找出其循環節次。

摘要：

我們欲證明任意 n 個正整數(n>1)之數列，其相鄰兩數相減之絕對值形成一個新數列，重複這個"運算"之數列是否具有循環性，並試圖找出其循環節次。

0000	2	3	4	2	3
0001	1	1	2	1	1
0002	0	1	1	0	0
0003	1	0	1	0	0
0004	1	1	1	0	1
0005	0	0	1	1	0
0006	0	1	0	1	0
0007	1	1	1	1	0
0008	0	0	0	1	1
0009	0	0	1	0	1
0010	0	1	1	1	1
0011	1	0	0	0	1
0012	1	0	0	1	0
0013	1	0	1	1	1
0014	1	1	0	0	0
0015	0	1	0	0	1
0016	1	1	0	1	1
0017	0	1	1	0	0

$\langle \mathbf{a_2} \rangle = \langle \mathbf{a_{17}} \rangle$ =0 1 1 0 0，
其循環節次為 17−2=15 次

此"運算"的循環節次為 15(週期為 15)

〈a_i〉						最大值〈M_i〉	總和〈S_i〉
0000	3	2	3	1	4	4	13
0001	1	1	2	3	1	3	8
0002	0	1	1	2	0	2	4
0003	1	0	1	2	0	2	4
0004	1	1	1	2	1	2	6
0005	0	0	1	1	0	1	2
0006	0	1	0	1	0	1	2
0007	1	1	1	1	0	1	4
0008	0	0	0	1	1	1	2
0009	0	0	1	0	1	1	2
0010	0	1	1	1	1	1	4
0011	1	0	0	0	1	1	2
0012	1	0	0	1	0	1	2
0013	1	0	1	1	1	1	4
0014	1	1	0	0	0	1	2
0015	0	1	0	0	1	1	2
0016	1	1	0	1	1	1	4
0017	0	1	1	0	0	1	2
0018	1	0	1	0	0	1	2
0019	1	1	1	0	1	1	4
0020	0	0	1	1	0	1	2

由此開始數列內的整數非0即1

由此可知 M_i 遞減

環狀排列之循環

直線排列之循環

表二：任意 5 個整數之測試

理論證明

(一)定理甲:數列<ａ$_0$>含有三個相異數以上，經有限次運算後，則M_0一定會遞減

證明如下：

1. 若數列$<a_0>$中M_0的相鄰數是不為 0 且較M_0小的數，則M_0與此相鄰數相減必立即嚴格遞減。 例：

				M_0				
$<a_0>$	0	0	2	9	1	0	8	
$<a_1>$	0	2	7	8	1	8	8	可看出M_0立即嚴格遞減

若將不為 0 且較M_0小的M_0相鄰數設為 a

設原始數列$<a_0>$＝0 0 a M_0 0 …… ，則運算時$M_0-a<M_0$，即立即嚴格遞減。

2. 若數列$\langle a_0\rangle$中M_0的相鄰數是 0 則經有限次運算後也必遞減

先舉一個例子證明： 將數列 9 8 0 0 9 0 0 0 0 9 0 0 0 0 0 3 8 1 0 0 0

繞排得 $\langle a_0\rangle$為 1 0 0 0 9 8 0 0 9 0 0 0 0 9 0 0 0 0 0 3 8

使$\langle a_0\rangle$數列首項不為M_0 及 0，然後繼續運算$\langle a_0\rangle$至$\langle a_{19}\rangle$ 。如表三

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	0	0	0	9	8	0	0	9	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	3	8
1	0	0	9	1	8	0	9	9	0	0	0	9	9	0	0	0	0	3	5	7
1	0	9	8	7	8	9	0	9	0	0	9	0	9	0	0	0	3	2	2	6
1	9	1	1	1	1	9	9	9	0	9	9	9	9	0	0	3	1	0	4	5
8	8	0	0	0	8	0	0	9	9	0	0	0	9	0	3	2	1	4	1	4
0	8	0	0	8	8	0	9	0	9	0	0	9	9	3	1	1	3	3	3	4
8	8	0	8	0	8	9	9	9	9	0	9	0	6	2	0	2	0	0	1	4
0	8	8	8	8	1	0	0	0	9	9	9	6	4	2	2	2	0	1	3	4
8	0	0	0	7	1	0	0	9	0	0	3	2	2	0	0	2	1	2	1	4
8	0	0	7	6	1	0	9	9	0	3	1	0	2	0	2	1	1	1	3	4
8	0	7	1	5	1	9	0	9	3	2	1	2	2	2	1	0	0	2	1	4
8	7	6	4	4	8	9	9	6	1	1	1	0	0	1	1	0	2	1	3	4
1	1	2	0	4	1	0	3	5	0	0	1	0	1	0	1	2	1	2	1	4
0	1	2	4	3	1	3	2	5	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3
1	1	2	1	2	2	1	3	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	3
0	1	1	1	0	1	2	2	4	1	0	0	0	0	0	0	0	2	2	3	2
1	0	0	1	1	1	0	2	3	1	0	0	0	0	0	0	2	0	1	1	2
1	0	1	0	0	1	2	1	2	1	0	0	0	0	0	2	2	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	2	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	2	1	0	0	1	0	1

L 線右移，R 線左移至兩線重疊或交錯，此時最大數 9 必消失

(二) 定理乙：<a0>經有限次運算後不是均變為 0，就是變成 0、m 兩種數字

分三種情形證明如下：

1. 若數列<a0>內共有2 個數經有限次運算後必全為 0。

2. 若重複上述之數列<a□> k 次得到情形如

<a0 >'≡a1 a2 a3...a 2 n，a1 a2 a3...a 2 n，......， a1 a2 a3...a 2 n，

則經有限次運算後亦全為 0

3. 若數列<a0>中除了 0 與M0外，尚有另一數Mi，而Mi＜M0，由定理甲得知M0必會 遞減，而一直遞減的結果，每一項均變為 0，因為Mi必遞減，而底限為 0，自然最後 每一數均變為 0，除非當<ai>數列中僅剩下 0 與Mi兩種數，故定理乙得證。

(三) 定理丙：

數列個數不是2n次方個且ai ∈ {0、m}時，經有限次運算則產生循環或歸零

當數列運算到只剩 0、m 兩種數字，

若此數列中有 k 個整數，

則由 0、m 組成 k 個的直線排列 情形就只有2k次方種，

最多運算2k次方＋1 次，必有重複的情況，此時便會產生循環或歸零

故定理丙得證。

結論

(一)、任意 n 個正整數之數列依此運算具有循環性。

定理甲：數列 $<a_0>$ 含有三個相異數以上，經有限次運算後，則 M_0 一定會遞減

定理乙：$<a_0>$ 經有限次運算後不是均變為 0，就是變成 0、m 兩種數字

定理丙：數列個數不是 2^n 個且 $a_i \in \{0、m\}$ 時，經有限次運算則產生循環或歸零

(二)、任意 n 個正整數之數列依此運算，必可找出其循環節次。

定理丁：數列個數為 2^n 其中 $a_i \in \{0、m\}$ 且含有偶數個 m，則此數列經運算 2^n-1 次必歸零終止成每一項皆為 0 的數列

定理戊：數列個數為 2^n-1 時，其中 $a_i \in \{0、m\}$ 且含有偶數個 m，若不歸零，則其循環節次為 2^n-1

數列<bn >的個數為數列< a n >的個數的2倍時，數列<bn > 的運算循環節次為數列 < a n>的2倍是否會成立？

數列個數3的運算循環節次為3

次數	1	2	3
0000	8	2	4
0001	6	2	4
0002	4	2	2
0003	2	0	2
0004	2	2	0
0005	0	2	2
0006	2	0	2

數列個數 6 的運算循環節次為 6

次數	1	2	3	4	5	6
0000	3	5	2	0	2	0
0001	2	3	2	2	2	3
0002	1	1	0	0	1	1
0003	0	1	0	1	0	0
0004	1	1	1	1	0	0
0005	0	0	0	1	0	1
0006	0	0	1	1	1	1
0007	0	1	0	0	0	1
0008	1	1	0	0	1	1

次數	1	2	3	4	5	6
0000	3	2	3	4	7	0
0001	1	1	1	3	7	3
0002	0	0	2	4	4	2
0003	0	2	2	0	2	2
0004	2	0	2	2	0	2
0005	2	2	0	2	2	0
0006	0	2	2	0	2	2

整理

數列個數5的運算循環節次為 15，

兩倍：數列個數 10的運算循環節次為 30(但產生雙循環的數列其循環節次只有 15)

數列個數3其循環節次為 3，

兩倍：數列個數 6其循環節次為 6

三倍：數列個數 9其循環節次為 63

他們用電腦程式試了很多這樣的例子，數列個數為 2倍時，循環節次亦為 2倍，但數列個數為 3倍時，循環節次卻不為3倍，感到疑惑，有待我們深入探討

The end