數學思維與解題－作業1(56屆)

第五組

組員:
410731207 趙鴻儒
410731210 張曜巖
410731214 魏玄宇
410731215 陳宥穎
410731241 陳威安

第一名 多方塊的塗色問題

研究動機

有一天, 在書上看到了這個題目 : 在無限大的棋盤上, 塗上n 種顏色使得V 形三方塊沿格線無論如何放置在 棋盤上, 都不會蓋到重複之顏色, 問n 的最小值為何？

n = 4 是滿足條件的, 其構造法如右下圖

看完上面的問題後, 便開始思考 :如果不是V 形三方塊, 而是其它種三方塊, 甚至是四方塊、五方塊, 或者廣泛的k 方塊, 那麼 n 的最小 值又是什麼呢？

研究目的

一、對於單方塊到五方塊的種類進行分析

二、探討各種多方塊塗顏色之構造法並求出n 的最小值

三、證明求出的n 即為最小值

四、研究是否有方法對所有多方塊所需的顏色進行估計

類別 幾何

1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4

第二名 層層疊疊-雙心多邊形面積的一個有趣性質

研究動機

在《奧林匹亞數學中的幾何問題》一書的第一篇第十五章性質 9提到「三角形的面積是其 旁心三角形面積與內切圓切點三角形面積的等比中項」。這讓我們想到此定理是否可以推廣 到其它邊數的雙心多邊形，因此決定以此當作研究題材。

研究目的

本研究的目的在討論並尋找其它雙心n邊形，使其符合上述性質：雙心$\boldsymbol{n}$邊形的面積是其旁心$\boldsymbol{n}$邊形面積與內切圓切點$\boldsymbol{n}$邊形面積的等比中項。並試著利用雙心n邊形的性質，證明 此結果為真。

類別

幾何、雙心多邊形、內心、旁心

第三名 點點相應在「格」中 -平面與空間中格子圖形之探討與推廣

研究動機

坐標平面上(或空間中)，x坐標、y 坐標(及 z 坐標)均為整數的點都稱為「格子點」。當我們在研究格子三角形時，就聯想到求五心坐標的答案總是不漂亮，而引發我們深入探究的動力，想找尋格子三角形的五心與九點圓圓心皆為格子點的充分條件。同時，我們也發現一些有趣的推廣定理，而推導出形成格子圖形的充要條件。透過解析幾何的論證方式，並配合我們高中數學課程中學過的重要概念「數列與級數」、「直線與圓」、「平面向量」、「空 間向量」、「二階方陣所對應之平面變換」、「立體幾何」等單元來解決研究的問題。

研究目的

一、探討格子正方形與格子正立方體穿過格子點的直線數，及導出其一般式。
二、探討形成格子圖形的必要條件，及形成特殊格子圖形的充要條件。
三、探討格子三角形滿足 內心與旁心皆為格子點的類型，並推論至一般化的性質。
四、探討格子三角形滿足五心與九點圓圓心皆為格子點的類型，並推論至一般化的性質。
五、應用於連續整數邊的三角形，並探討出一些的性質。

類別 幾何

第三名 棋盤中的美好「缺」憾

研究動機

本題目源自於2014年IMO第2題：n≥2為整數。有一個n×n的方格棋盤，把n顆棋子放在棋盤的方格中，使得每行每列都恰有一個棋子，稱為和平排列。每一個n×n的和平排列，都可以在其中找到一個不包括任何棋子的k×k正方形，求k的最大值。原題目是由n的值得到k的值，但我們的研究方向是由k的值得到n的值，並且把k×k正方形拓展到更一般化的$(k \times k - m \times m)$缺角正方形。

研究目的

一、證明原題，並討論$f(k, 0)$之值及S(k, 0)內元素
二、討論$f\alpha(k, 1)$的值及 S(k,1)中元素
三、討論$f\beta(k, 1)$的值
四、討論$f\beta(k, k-1)$的值
五、討論$f\alpha(k, k/2)$的值

類別 排列

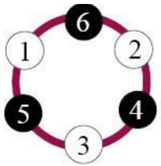
第三名 數珠手環

研究動機

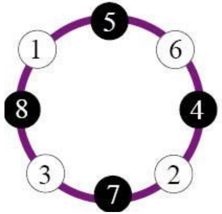
數珠手環的相關問題在歷屆科展中已有人研究過(將此問題稱為邏輯圈)，但結論只停留在一些簡單的特例，不夠一般化，因此我們試圖針對不同長度的數珠手環問題，進行研究。

研究目的

因為數珠手環為黑、白色相間的珠子所構成，故黑色珠與白色珠的數量相同。給定一個數珠手環，令 n為白色珠的數量，其中 n>=3，若能將自然數 {1,2,3,.... ,2n} 個別鑲嵌在2n個珠子上，使得每一個黑色珠上的數與相鄰的兩個白色珠上的數，其數字總和皆為定 值，則我們稱長度為 n的數珠手環有解。在此份 說明書中，我們將說明下列幾項結論：



（1）當n為奇數時，數珠手環皆有解。排除對稱性，數珠手環的解非唯一
（2）當n為偶數時，數珠手環皆有解。排除對稱性，數珠手環的解非唯一
進一步，若將數珠手環的概念推廣到一般圖形，我們也有以下結論：
（3）當n>=2，路徑圖 Pn 皆有解。
（4）當n>=2，星狀圖 Sn 皆有解。



類別 邏輯函數、數列、權重圖

佳作 拉丁「圍」機

研究動機

本研究發想於 2014 年 IMO 的第二題:「求最大的正整數 k, 使得所有在每行每列恰 有一顆棋子的 n×n 棋盤中, 都有一個 k×k 正方形, 其內沒有任何棋子。」在解完原本的 題目後, 我聯想到更廣的問題:「求最小的非負整數 a, 使得所有在每行每列恰有一顆棋 子的 n×n 棋盤中, 都有一個 k×k 正方形, 其內棋子數不超過 a 個。」便從這個問題開始 進行我的研究。

研究目的

fm(n,k):k,n,m 為正整數且滿足1≤k≤n,1≤m≤n。若 a 是最小負整數, 使得所有 n 階的 m–(1,0)拉丁方陣中, 都有一個形, 其內數字和不超過 a, 則記fm(n,k)=a

(一) 求 f1(n,k)的一般式

(二) n大於等於2, 求 f2(n,k)的一般式

1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1

8 階的 3–(1,0)拉丁方陣

類別 組合

佳作 Dragon Curve

研究動機

老師給我一篇關於 θ 為 90° 的 Dragon Curve 的文章，裡面提到它的各種性質、規律及 如何用一個公式算出 Dragon Curve 上各個節點的座標位置，我覺得很有趣，查閱了一 些資料後，將 θ 改成其他角度來和最原始的 Dragon Curve 做比較。

研究目的

一. 找出除了 θ=90° 以外，還有哪些角度能形成有意義的 Dragon Curve。
二. 找出可以計算 θ=120° 的 Dragon Curve 上每個節點座標的公式。
三.證明 θ=120° 的 Dragon Curve 每到第2k個節點時，接下來的方向必會向左轉。
四.證明 θ=120° 的 Dragon Curve 在平面上是否會相交，不論是自穿或互穿。

類別 幾何向量

佳作　任意凸四邊形上或形內一點到四頂點距離和的最大值

研究動機

很多同學都知道任意凸四邊形上或形內一點到四頂點距離和的最小值是兩條對角線長的和, 發生最小值的點就是兩對角線的交點,這只要用到三角不等式,就能夠輕易的證明出來,但是任意凸四邊形上或形內一點到四頂點距離和的最大值,卻在網路上找不到基礎的證法老師在班級數學課有教 Geogebra,於是引起同學學習研究的興趣,經由老師介紹陳昭地教授的文章當參考,然後各自分頭努力作動態模擬,最後得到一個可以讓同學信服的成果

研究目的

這是一個通俗的問題,人人皆能認識問題的要求是什麼,但是證明的方法卻不是那麼簡單,基於 研究數學的立場,愈是困難的問題,愈是我們需要挑戰的目標:找尋新的手法與技巧是我們努力的方向(否則早被人證明出來),綜合幾何仍是重要的工具,橢圓法是一個新的解析幾何技巧,求 證過程的演算法則也相當重要.這些都是在求證過程中,經由半年慢慢累積的經驗,絕非一蹴可 及.對我們幾位學生而言,這是一個研究數學的重要歷程

類別　幾何

最佳團隊合作獎 即刻救援

研究動機

在一次的專題討論課程中，老師推薦一些國內外數學競賽試題的網站，提供尋找研究題目 的機會，透過探索後，發現 2005 亞太數學奧林匹亞(APMO)試題中一個令我們覺得新奇而且活 潑的題目，內容是關於生活中的救火危機處理，在了解及推導原題解法後，我們也嘗試改變部 分因素，繼續相關的研究和發展。

研究目的

一、原題討論。
二、改變起火點位置、個數及單位時間內的搶救數，並找出搶救規則及一般式。
三、改變棋盤條件。
四、討論火勢蔓延方式的改變對於搶救數及燃燒數的影響。
五、將起火點位置、個數、單位時間內的搶救數...等改至空間討論。

類別 平面座標

最佳(鄉土)教材獎

好一個「基因」— 十字型橢圓規的推廣研究

研究動機

我對幾何很感興趣。在自行研讀第四冊課程時，對橢圓的性質感到好奇，加上在網路和書籍看到用兩條垂直直線當框架 來進行操作的十字型橢圓規，就希望對其有較深入的理解及推廣(例如，若當作框架的兩直線未必垂直)，於是便開啟我的研究。

研究目的

一、探討十字橢圓規的原理，並推廣至兩線未必垂直的情況。
二、推廣十字橢圓規的原理至各種二次曲線 (橢圓、雙曲線、拋物線)。
三、使用基因觀念發展出對各式曲線進行操作之方式。
四、利用研討三系統，但並非使用線性變換，而用其餘方法變換(例如反演……。)
五、依據以上結果加以應用，(例如三角形的特殊點、費馬點……)。
六、雙軸斜角之比例線段橢圓規討論。

類別 幾何

最佳創意獎 PODO123 (polyomino do math)

研究動機

對於生活中的排列、收納等空間運用問題，與俄羅斯方塊的排列和種類(各種連方的數目) 有相當程度上的相似。因此，若透過俄羅斯方塊在平面上的放置，也許能夠簡化及解釋 其規則

研究目的

一、觀察與統整俄羅斯方塊在矩形方格上的填滿問題，以討論相關規則

二、建立討論俄羅斯方塊的數學系統

類別 質因數、數列

佳作 格子點上選擇位置之性質研究

研究動機

在搭乘捷運的時候, 有時會出現一種場景:雖有空位但卻有人站著。通常是因為不好意思坐在陌生人的旁邊。偶然地有一天看到別人提出了類似的問題模型, 我想到這很像前面提到的情況。於是我想探討:如果大家都這樣坐, 那究竟坐得下多少人?於是我想探討在這種情況下, 能在一、二維空間下的格子點坐下多少人?

研究目的

在一個n維度Rn空間中考慮區間 $I_n=[1,a_1]*[1,a_2]*[1,a_3]...*[1,a_n]$, 其中 $a_k \in N$，$1 \le k \le n$, 即 $I_n=\{(x1,x2,x3...xn \mid xk \in N, 1 \le xk \le ak, 1 \le k \le n)\}$ ，我們假定在In中每個格子點有一個座位, 依以下規則選擇座位：除第一人外, 其餘每一個人依序選擇座位, 使得所選擇的座位對於已被選取的座位之"最小點距"達到最大值, 且規定不得和之前已選定位置者鄰座(哈密頓距離為1)

哈密頓距離(數學式)

A(a1,a1,...an),B(b1,b2,...bn)∈Rn的哈密頓距離為

$$\|A-B\|_1=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$$

研究目的一: 當第一個人就近選擇最靠近原點的位置坐時, 能坐下幾個人?

研究目的二: 當第一個人可以任意決定位置時, 第一個人應該坐在哪裡才能 使得總共坐下最多人?

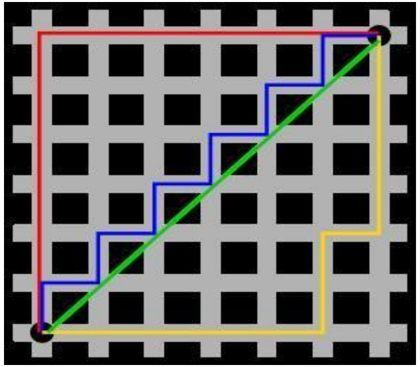
研究目的三: 承上研究目的二條件下, 決定能夠坐下總共多少人?

研究目的四: 承上研究目的二條件下, 若增加椅子的數量, 椅子數與至多能 坐下的人數之關係為何?

主要名詞定義與解釋(方便閱讀及講解下文)

一、哈密頓距離(圖解)

圖中紅線代表哈密頓距離，綠色代表歐氏距離，也就是直線距離，而藍色和黃色代表等價的哈密頓距離。哈密頓距離——兩點在南北方向上的距離加上在東西方向上的距離，即d(i,j)=|xi-xj|+|yi-yj|。對於一個具有正南正北、正東正西方向規則佈局的城鎮街道，從一點到達另一點的距離正是在南北方向上旅行的距離加上在東西方向上旅行的距離，因此，哈密頓距離又稱為計程車距離。哈密頓距離不是距離不變量，當坐標軸變動時，點間的距離就會不同。



主要名詞定義與解釋(方便閱讀及講解下文)

二、最小點距

定義一個點 P 到其他點$Q_1,Q_2,\ldots,Q_k$ 的距離為 $\min_{1\le i\le k}\{\|P-Q_i\|_1\}$，稱為 P 點的「最小點距」。

(在此文中最小點距均以哈密頓距離來計算)

三、鄰居

在一維數線上，兩個人，如果當時他們之間沒有其他人，將兩個人視為是鄰居。

主要名詞定義與解釋(方便閱讀及講解下文)

四、格子的相鄰

如果兩個格子的哈密頓距離為1，將他們視為是相鄰的。

五、高斯符號

下高斯符號:記⌊x⌋表示不大於 x 的最大整數值。

上高斯符號:記⌈x⌉表示不小於 x 的最小整數值。

六、賦值法

將問題的某些變量賦予數值以進行運算，觀察數值的變化，以代表整體。

研究過程

[性質1]$\lfloor n/2\rfloor \geq f(n) \geq \lfloor n/3\rfloor$

左式:考慮賦值法, 對被填入的每一個座位賦值 1, 其左右兩側賦值 1/2。於是能填入的數值上限為第 0 和第n+1格(假想存在)至多各 1/2。對於$1\leq i\leq n$, 第 i 格至多填入1。所以總共至多能填 (½)×2+1×n=n+1。然而每填一個位置都使數值增加2, 所以$f(n)\leq \lfloor (n+1)/2\rfloor \leq \lceil n/2\rceil$。

右式:由於每次填入座位至多減少 3 個可填座位(本身和相鄰兩個), 故$f(n)\geq \lfloor n/3\rfloor$, 否則將仍可再填。故得證。

[性質 2]關於一個點對所有點的最小點距, 事實上只和左右兩側最接近它已被填入的位置有關。

[推論 3]只要一個人 C 預定要坐下時的左右鄰居都已坐定, 分別在A(a),B(b)。則 C 的位置便可坐定, 且其位置為那兩個人的中點L(a+b)/2」

[引理 4]我們可以每次任找兩個鄰居(P,Q)構成區間a(特別的, 也可以找最左或最右的人和牆壁), 令一個人在區間內坐到合理的位置 T (中點或靠牆)。如此也不會影響結果。

證明: 假設依照原本的方法有人左下的位置集合為 A ,引理 4 的方法為 B 。我們要證明 A=B。

(B⊆A):由推論 3, 我們僅須證明位置 T 能被坐下且坐下時其左右鄰居必為P,Q。然而除非與 T 相鄰的格子被佔據, 否則 T 能被坐下。而與其相鄰的格子必屬於a, 又其左右鄰居為P,Q的充要條件為T是a中第一個坐下的人, 而確實如此, 故得證。

(A⊆B): 已知B ⊆A, 反設 A 中有一元素F不在B中。設F的左右鄰居為G,H。於是, F格與G,H的距離大於1, 從而由性質 2 知F與B的最小點距大於1。這是一個不合法的狀態, 矛盾, 故得證。於是我們得到了一個重要的結論。

[推論 5]若第一個人坐在座標 a 的地方，則$f(n)=f(a)+f(n-a+1)-1$

由推論 5 便能得到我們前面的猜測。

[推論 6]$c(n)=c(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)+c(n-\lfloor (n+1)/2 \rfloor+1)-1$

[角落情況] 有了推論 6 的遞迴式，我們可以列出如下的表格。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$c(n)$	1	1	2	2	3	3	3	4	5	5	5	5	5	6	7	8	9	9
n	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$c(n)$	9	9	9	9	9	9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	17	17	17

由性質 1 知$c(n)\leq\lceil n/2 \rceil=\lfloor (n+1)/2 \rfloor\leq(n+1)/2$，先試著找出使等號成立的 n 值。

這樣的 n 值為 1,3,5,9,17,33…，會發現當 $n\geq3$時這個數列是 $2^k+1\ (k\in\mathbb{N})$

研究結論

(一)在一維數線上, I1=[1,n]中的 n 個格子點為座位, 則這群人選擇座位的方式: 在第一種情形中:

(1) 當第一個人坐在角落(座標 A(1))時:能坐下的人數為

$$c(x)=\begin{cases}(2^{k-1}+1),\text{if } x=2^k+m\ (k\ge 2, 1\le m\le 2^{k-1})\\(2^{k-1}+m),\text{if } x=2^k+2^{k-1}+m\ (k\ge 2, 1\le m\le 2^{k-1})\end{cases}\quad \text{對於 } x\ge 4$$

(2) 當第一個人任意決定位置時, 選擇的座標為 $2^{\lfloor \log_2(n-1)\rfloor}+1$ **時能坐下最多人**

(3) 承上, 此時能坐下的人數為 $g(n)=(\frac{x+1}{2})+c(n-x+1)$

, 其中 $x=2^{\lfloor \log_2(n-1)\rfloor}+1$

(4) 承上, 每增加一張座位時, 能坐下的人數最大值之變化函數如下:

$$g(n)-g(n-1)=\begin{cases}0,\text{if } x=2^k+m\ (k\geq 2, 1<m\leq 2^{k-1}+1)\\ 1,\text{if } x=2^k+2^{k-1}+m\ (k\geq 2, 1<m\leq 2^{k-1}+1)\end{cases}$$

在一維數線上, I1=[1,n]中的 n 個格子點為座位, 則這群人選擇座位的方式:在第二種情形中:

(1) 當第一個人坐在角落(座標 A(1))時, 能坐下的人數如下: $d(n)=n-2^t$
其中 t 滿足 $2^{t+1}+2^t\geq n>2^t+2^{t-1}$

(2) 當第一個人任意決定位置時, 選擇的座標為 2^k+2^{k-1}時能坐下最多人
, 其中 $n\geq 2^k+2^{k-1}>\frac{n}{2}$

(3) 承上, 此時能坐下的人數為 $h(n)=2^k+d(n-2^k+2^{k-1}+1)-1$ **, 其中** $n\geq 2^k+2^{k-1}>\frac{n}{2}$

(4) 承上, 每增加一張座位時, 能坐下的人數最大值之變化函數如下:

$$\Delta h(n)=\begin{cases}2^{t-2}-2^t\ ,\text{if } n=(2^k+2^{k-1})+(2^t+2^{t-1})-1\ ,2\leq t<k\\ -1\ ,\text{if } n=(2^k+2^{k-1})+5\ ,2\leq t<k\\ 0\ ,\text{if } n=1\vee 3\vee(2^k+2^{k-1})\vee(2^k+2^{k-1})+2\ ,2\leq k\\ 1\ ,\text{if else.}\end{cases}$$

(二)在二維平面上, I2中的格子點為座位, 則這群人選擇座位的方式: 只考慮第二種情形中:

(1)當I2=[1,n]x[1,n]時, 當第一個人做角落時(座標 A(1,1)), 能坐下的人數為: $d(n,n)=3\cdot 4^k+(4m-2)\cdot 2^k+m^2$ ，其中 $n=2^{k+1}+2^k+m,1\leq m\leq 2^{k+1}+2^k$

(2)當I2=[1,n]x[1,m]時(n>=m), 能坐下的人數滿足

$$d(n,m)=\begin{cases}2a(\frac{n+m-1}{2},n-m+1) & \text{,if } 2\nmid n+m\\ 2a(\frac{n+m}{2},n-m+1)-m & \text{,if } 2\mid n+m\end{cases}$$

其中,

$$a(n,k)=\begin{cases}a(\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor,\left\lfloor k-\frac{n}{2}\right\rfloor)+m\times d(\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor)-m\cdot f_n & \text{,if } k>\frac{n}{2}\\ [a(\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor,k)+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\times d(\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor)]+a(\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor,1)-\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\cdot f_n & \text{,if } k\le\frac{n}{2}\end{cases}$$

$$f_n=n-2\cdot\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.$$

且當 $n=2^{k+1}+2^k+m, 1\le m\le 2^{k+1}+2^k$ 時, $a(n,1)=6\cdot 4^{k-1}+(4m+1)\cdot 2^{k-1}+\frac{m(m+1)}{2}$

(三)在 n 維空間中, In中的格子點為座位, 則這群人選擇座位的方式: 只考慮第二種情形中:

(1)在 n 維中共有 k 個人任意選擇能坐下的人數為fn(k), 則滿足不等式

$$\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \geq f_n(k) \geq \left\lceil \frac{k}{2n+1} \right\rceil$$

(2)圍都相等時, 每次填入的數必為x1+x2...+xn=k, 對於某個k。如此, 可以確定它是P問題(目前最佳時間複雜度 , 其中n是維度, m是每個分量的上界)。 $O(n^3m^3)$

感謝聆聽