2015年全國科展

數學思維與解題第六組

廖英秀｜許定閎
王霆軒｜林政勳｜馬國凱

壹｜參展獲獎作品

第一名

| 040402 | 類別：射影幾何、極點極線、圓錐曲線

層出不窮的彩蛋有「心」「跡」
–圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質探討

研究動機 |

在探討「雙心多邊形的共點共線性質」的前置研究中，礙於尚有未完成的問題與發表篇幅有限，本研究將延續並進一步探討未觸及的問題，其中包含雙心六邊形的 Brianchon 點及 Pascal 線之軌跡(含廣義 Brianchon 點或廣義 Pascal 線)，以及雙心六邊形的邊延長或頂點切線所產生層出不窮的遞延圖形中，Brianchon 點和 Pascal 線的關係以及軌跡圖形。

研究目的 |

本研究的目的在討論並尋找數個 n 邊形，使其符合條件：
在各邊為一邊向外作正n 邊形，
而這n 個正 n 邊形的中心點相連可構成一個正 n 邊形。
並試著找出原 n 邊形之條件，並找出其作法。

第二名

| 040403 | 類別：Möbius 反轉定理

開關燈圖形變換

研究動機 |

藉由題目「100 顆全暗的燈泡，每個燈泡都有一個開關，按任意編號的燈泡開關都會同時改變那些號碼為該編號倍數的燈泡的亮暗狀態，當所有編號的燈泡開關都被按一下，哪些燈泡是亮的？」
進行了延伸探索「若選定某些特定的編號，而只有在按下一些編號的燈泡開關時，才會改變那些號碼為編號倍數的燈泡的亮暗狀態，最後哪些燈泡是亮的？反之，若先指定操作後的結果，那麼原先的特定編號為何？」

第二名

| 040403 | 類別：Möbius 反轉定理

開關燈圖形變換

研究目的

定義1°：給定一組從1開始編號的燈泡，其中的燈泡有些亮、有些暗(可以全亮或全暗)。
我們乾脆就用黑格子來代表暗的燈泡、白格子來代表亮的燈泡，
因此就把這一組燈泡的亮暗狀態看成一個由黑白格子依編號排列而成的「圖」
今若兩個圖G_1, G_2的格子數相同，我們稱下述操作:

「若G_1的第d號燈泡是亮的，則G_2中每個編號為d的倍數的燈泡都要改變亮暗狀態一次。」

為「用G_1來改變G_2」，並用符號$\hat{G}_1(G_2)$來表示G_2被這樣子操作後所獲得的新圖。

一、釐清等式$\hat{G}_0(\boxed{0}) = G_1$中的$G_0$和$G_1$如何互相推導，特別是如何從$G_1$反推回$G_0$。
(請注意，這其實相當於考慮研究動機中所提的問題：
若選定某些特定的編號，而只有在按下這些編號的燈泡開關時，
才會改變那些號碼為該編號倍數的燈泡的亮暗狀態。那麼，最後哪些燈泡是亮的？
反之，若先指定操作後的結果，那麼原先的特定編號為何？)

二、探討當我們從給定的圖G開始，重複操作$\hat{G}(G), \hat{G}(\boxed{0}), \hat{G}(H)$(H是固定的圖)會有什麼性質。

三、進一步的把黑白兩種顏色的研究心得推廣至質數種顏色的運算性質。

四、將研究成果與密碼結合。

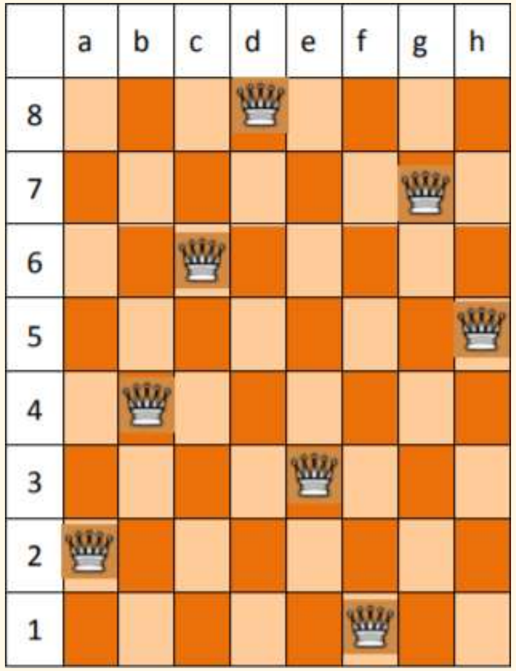
最佳鄉土教材

| 050404 | 類別：正三角形棋盤

斜向座標上皇后之研究

研究動機 |

作者看見八皇后問題後，嘗試將棋盤更改為正三角形棋盤，雖然僅需考慮3個方向，但不限制其皇后數，就可討論在一邊有 n 個圓圈且所有圓圈需被管轄到時，最多可擺放幾個皇后。研究過程運用向量單元中斜向座標來進行研究。



| 050404 | 類別：正三角形棋盤

斜向座標上皇后之研究

研究目的 |

一、討論皇后在不同的圓圈位置時，所能管轄的總圓圈數的差異。
二、討論每個圓圈座標的差異
三、探討兩個皇后至少共同管轄幾個圓圈；最多共同管轄幾個圓圈。
四、盡可能在一邊有 n 個圓圈的棋盤上擺放皇后使得所有圓圈都被管轄到，最多可放置幾個皇后？
五、以座標法與討論法分別證明
六、嘗試找出最少皇后數的規律
七、將問題延伸至正四面體，將其座標化
八、生活中的應用

最佳鄉土教材

佳作

| 040406 | 類別：外接圓半徑和

環「徑」變遷

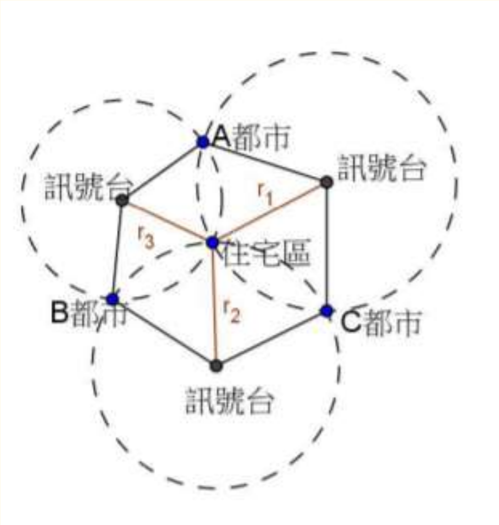
研究動機 |

我們藉由調整周圍三個訊號台的位置，使訊號台到相鄰都市與 住宅區的距離相等。又為使傳訊時能量損失最少，我們調整住宅區的設置地點以達到節能的目的。

佳作

| 040406 | 類別：外接圓半徑和

環「徑」變遷



研究目的 |

設兩相鄰都市和住宅區所形成的三角形之外接圓半 徑分別為 r1, r2, r3 ;為降低傳訊能量損失，我們考慮藉由調整住宅區地點，當 r1 + r2 + r3 有最小值時，

已知平面上一 ΔABC 及一動點 P，連接 PA、PB、PC，連出三個三角形；
設 ΔABC、ΔPAB、ΔPBC、ΔPCA 的外接圓半徑依序為 RΔABC、RΔPAB、RΔPBC、RΔPCA。
一、找出滿足 RΔPAB = RΔPBC = RΔPCA 時，P 點的位置。
二、當 ΔABC 為正三角形時，求出 RΔPAB+RΔPBC+RΔPCA的最小值，並找出 P 點的位置。
三、當 ΔABC 為等腰三角形時，求出 RΔPAB+RΔPBC+RΔPCA的最小值，並找出 P 點的位置。
四、當 ΔABC 為任意三角形時，求出 RΔPAB+RΔPBC+RΔPCA的最小值，並找出 P 點的位置。

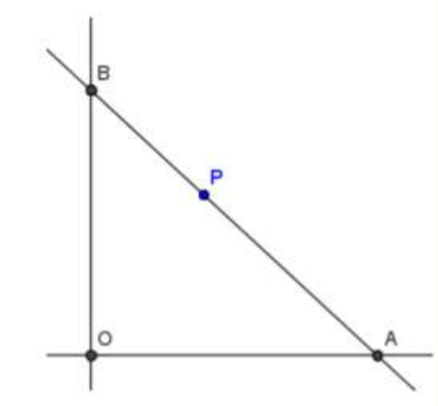
佳作

| 040407 | 類別：軌跡、解析幾何、等值曲線

過定角內定點之直線所圍三角形之六心軌跡性質研究

研究動機 |

以題目「平面上有一定點，過這個點的任意直線與 X 軸、Y軸所圍成三角形的面積最小值為何？」
延伸當 AB恆過定點 P(x0,y0) 時，則△OAB搗個心(外心O 、內心 I 、重心G 、 垂心 H 、費馬點 F1、第二費馬點 F2)的軌跡方程式為何?



佳作

| 040407 | 類別：軌跡、解析幾何、等值曲線

過定角內定點之直線所圍三角形之六心軌跡性質研究

研究目的 |

給定一定角∠XOY，在定角內給一定點 P ，則任意通過 P 之直線 L分別交直線 OX,OY 於 A,B 兩點，我們想研究當通過 P 直線 L開始變動，則三角形△ OAB外心 O、內心 I 、重心G、垂心 H 、第一費馬點 F1、第二費馬點 F2的軌跡圖形為何？

問題一: 當 $\angle XOY=\frac{\pi}{2}$，其三角形 ΔOAB 各心軌跡圖形為何?

問題二: 當 $\angle XOY$ 為任意角時，其三角形 ΔOAB 各心軌跡圖形為何?

若給定空間中四面體 $O-ABC$，且平面 ABC 恆通過定點 $P(x_0,y_0,z_0)$，我們想研究此四面體 $O-ABC$ 外接球心 O_1、重心 G、內切球心 I 軌跡圖形為何?

問題三: 當 $\angle AOB=\angle AOC=\angle BOC=\frac{\pi}{2}$，其四面體 $O-ABC$ 外接球心 O_1、重心 G、內切球心 I 軌跡圖形為何?

問題四: 當 $\angle AOB,\angle AOC,\angle BOC$ 為任意角時，其四面體 $O-ABC$ 重心 G 軌跡方程式為何?

第二名

| 040408 | 類別：排列組合

平面中路徑糾纏狀況之探討

研究動機 |

作者學到排列組合時的捷徑問題，試想在同一方格陣中，
兩個人走捷徑不相交的狀況。

研究目的 |

一、探討平面上矩形方格圖中，k人走捷徑且路線不相交總數(k為正整數)
二、探討六組對邊互相平行之六邊形擺入菱形地磚的方法數。

最佳創意

| 040409 | 類別：算數形、排列組合、分支圖

移「形」換「位」
－多邊形移動邊數關係之探討

研究動機 |

在化學課提到多個碳原子能以多邊形的形式組成環烷，而鍵結經過移動，可形成其他環烷類（甲基環戊烷、乙基環丁烷等），試想當在不同多邊形情況下，移動的邊數不同，所組合成的圖形是否存在規則。

最佳創意

｜040409｜類別：算數形、排列組合、分支圖

移「形」換「位」
一多邊形移動邊數關係之探討

研究目的｜

一、利用定義似幾何化過程–幾何算數形，進而討論移動邊數後之圖形情況。
二、找出多邊形移動一邊後可形成之所有幾何算數形的種類。
三、以排列組合方法找出在 n 邊形中移動一邊後，所形成之算數形分支圖總數，是否存在特殊規則，並找出一般形式。
四、找出多邊形移動二邊後可形成之所有幾何算數形的種類。
五、考慮在 n 邊形中移動二邊後所形成之算數形分支圖總數，在不同分支情況下是否仍存在特殊規則，並推導出其一般式。

佳作

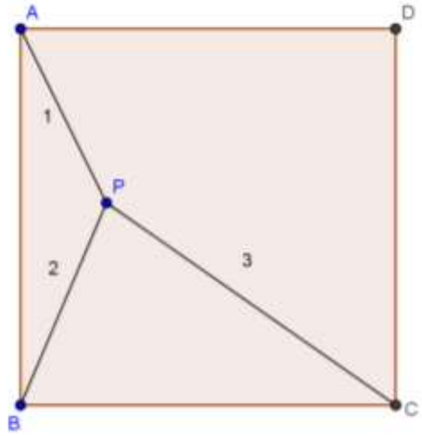
| 040412 | 類別：正方形、旋轉、伸縮

方方正正

研究動機 |

高二上第三冊數學課本習題的其中一題讓我們對這個問題產生一些好奇，原本的題目如下：設 P 為正方形 ABCD 內部一點，且 P 到 A、B、C 的距離分別為 1、2、3，試求正方形的面積。

我們想了解內部三線段為任意長度時，是否能構成正方形？線段長度的排列是否影響構成正方形的原因？若正方形改成菱形、長方形、平行四邊形，是否仍可構成？若是正五邊形，是否仍存在。



佳作

| 040412 | 類別：正方形、旋轉、伸縮

方方正正

研究目的 |

一、平面上一定點，及三段固定長，找出正方形，使得三頂點至定點距離為此三段長，並找出此正方形存在條件。

二、平面上一定點，及三段固定長，找出菱形，使得三頂點至定點距離為此三段長，並找出此菱形存在條件。

三、平面上一定點，及三段固定長，找出矩形，使得三頂點至定點距離為此三段長，並找出此矩形存在條件。

四、平面上一定點，及三段固定長，找出平行四邊形，使得三頂點至定點距離為此三段長，並找出此平行四邊形存在條件。

佳作

| 040413 | 類別：方格陣列中障礙物、捷徑走法、遞迴關係

超越障礙的勝利之路

研究動機 |

以國中科展題目：在一個方陣中隨機的投入地雷，當地雷數量達到多少時，可以找到一條路徑，使得路徑上都存在地雷

延伸：在方陣中隨機置入給定數量的障礙物，找出它通過障礙的捷徑走法之方法數與沒有任何障礙物時的捷徑走法之方法數之比值(亦稱通過率)。

佳作

| 040413 | 類別：方格陣列中障礙物、捷徑走法、遞迴關係

超越障礙的勝利之路

研究目的 |

1. 試圖尋找問題解決與數學探究的數學模式
2. 探究在方格陣列2xk 個障礙物時之捷徑走法數的一般式
3. 探究k個障礙物在方格陣列mxn捷徑走法數的一般式即通過率一般式
4. 探究k個障礙物在方體陣列mxn捷徑走法數的一般式即通過率一般式

第二名

| 040418 | 類別：拿破崙定理

拿破崙定理對多邊形之推廣

研究動機 |

在幾何明珠一書的第十八章中描述拿破崙定理之證明，並提及：以平行四邊形各邊為一邊向外側作正方形，則四個正方形的中心構成一正方形。這讓我們想到此定理是否可推廣至其他邊數為 n 的多邊形，因此決定以此當作研究題材。

研究目的 |

本研究的目的在討論並尋找數個 n 邊形，使其符合條件：在各邊為一邊向外作正n 邊形，而這n 個正 n 邊形的中心點相連可構成一個正 n 邊形。並試著找出原 n 邊形之條件，並找出其作法。

第一名

| 040420 | 類別：虧格、拼圖、鋪地磚

逼到牆邊一角
–論虧格位置與長條的關係

研究動機 |

一、類似於平面座標系將西洋棋盤 8*8 的方格標記，從左下方格(1,1)直到右上為(8,8)，將 21 支 1*3 的長方型放置在棋盤上。(長方型的方格與棋盤的方格大小一致，放置時可以水平或垂直，不重疊也不超出，而且彼此方格要對齊。)如果西洋棋盤方格(a,b)是成功放置所留下的唯一空格，稱之為虧格。試問下列數字之和

$$a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots=\underline{①②③}\ 。$$

其中(a_i,b_i)是所有可能的虧格；如果沒有任何虧格存在，請填答"000"。(來源：2014 亞太數學奧林匹亞初試試題)

以本題奧林匹亞數學題做延伸，試圖找出其規律。

第二名

| 040420 | 類別：虧格、拼圖、鋪地磚

遍到牆邊一角
–論虧格位置與長條的關係

研究目的 |

在 MxM 方陣中找出 1xN 長條或 N’xN 長方形的實際虧格。

貳｜作品探究

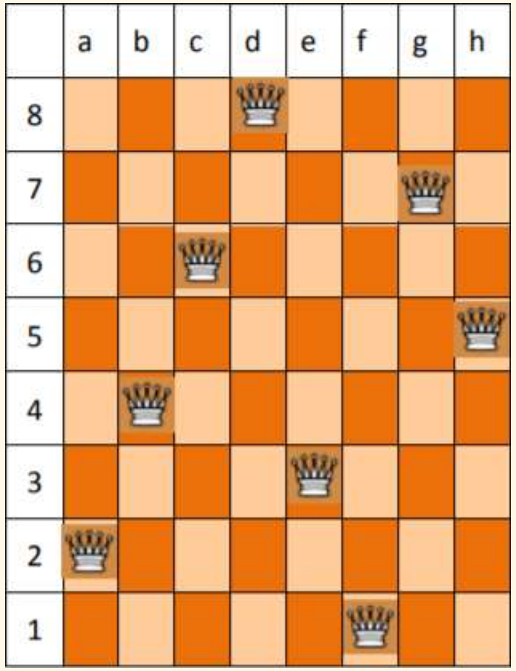
最佳鄉土教材

| 050404 | 類別：正三角形棋盤

斜向座標上皇后之研究

研究動機 |

作者看見八皇后問題後，嘗試將棋盤更改為正三角形棋盤，雖然僅需考慮3個方向，但不限制其皇后數，就可討論在一邊有 n 個圓圈且所有圓圈需被管轄到時，最多可擺放幾個皇后。研究過程運用向量單元中斜向座標來進行研究。



｜050404｜斜向座標上皇后之研究

研究目的｜

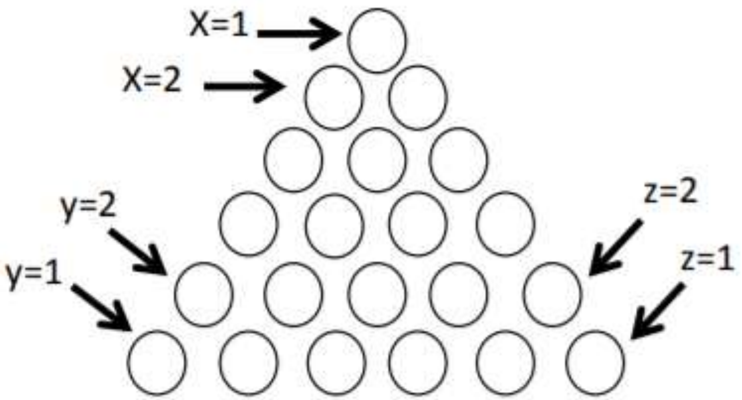
一、討論皇后在不同的圓圈位置時，所能管轄的總圓圈數的差異。
二、討論每個圓圈座標的差異
三、探討兩個皇后至少共同管轄幾個圓圈；最多共同管轄幾個圓圈。
四、盡可能在一邊有 n 個圓圈的棋盤上擺放皇后使得所有圓圈都被管轄到，　最多可放置幾個皇后？
五、以座標法證明
六、嘗試找出最少皇后數的規律
七、將問題延伸至正四面體，將其座標化
八、生活中的應用

｜050404｜**斜向座標上皇后之研究**

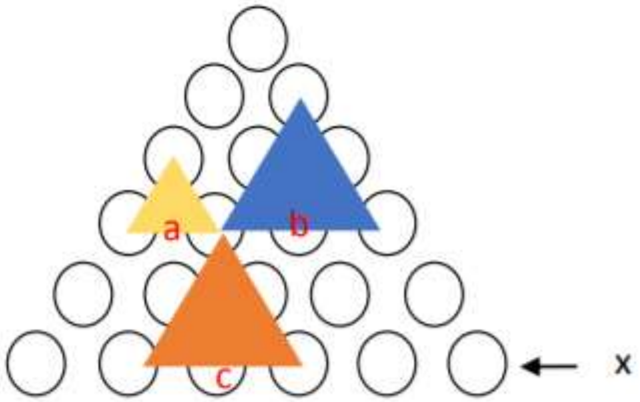
研究過程｜一、不論皇后位置

(一)x ,y ,z 三座標和相同

x+y+z=2n+1,其中 n 為邊數



(二)每個皇后所管轄的圓圈數皆相同



｜050404｜斜向座標上皇后之研究

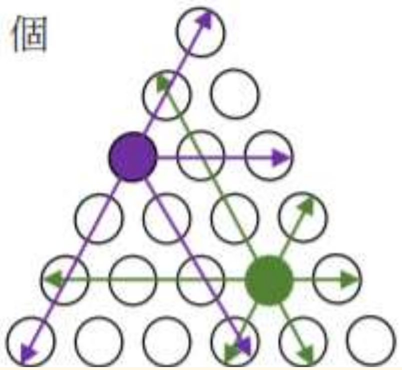
研究過程｜二、任兩皇后至少共同管轄 4 個圓圈；最多共同管轄 6 個圓圈

一圓圈之 x,y,z 座標中有一座標與兩皇后相同時稱共同管轄

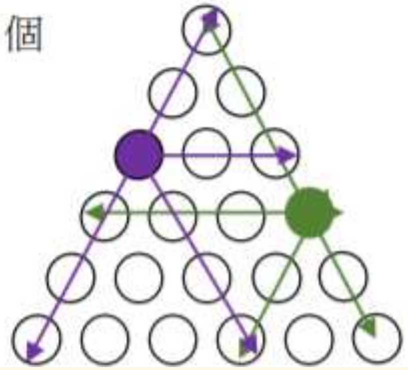
例:令兩皇后為(x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2)，若 $x=x_1$ ，$y=y_2$，則(x, y, z)為共同管轄之圓圈

討論兩不同皇后座標與共同管轄數的關係。結果發現兩個皇后共同管轄的圓圈數為 4 個、5 個或 6 個。

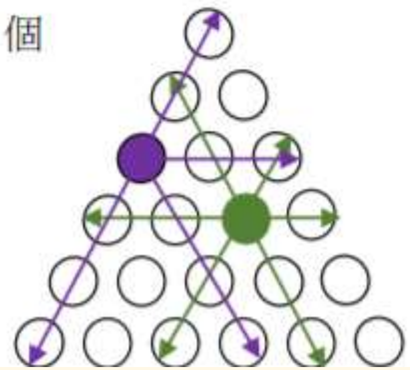
例: 4 個



5 個



6 個



最佳鄉土教材

｜050404｜斜向座標上皇后之研究

研究過程｜三、一邊有 n 個圓圈的正三角形棋盤最多可放置幾個皇后？

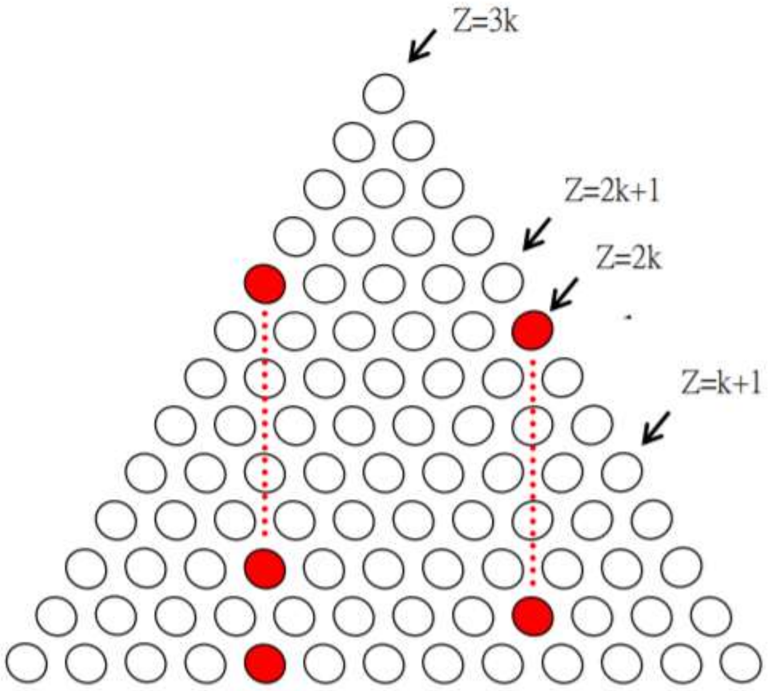
(一)一邊有(3k+1)個圓圈的正三角形棋盤，k 為 0 或正整數。

依以上規則我們選出如下皇后:

$$(k+1,2k+1,3k+1)(k+3,2k,3k)(k+5,2k-1,3k-1)\ldots(3k+1,k+1,2k+1)$$

$$(k+2,3k+1,2k)(k+4,3k,2k-1)(k+6,3k-1,2k-2)\ldots(3k,2k+2,k+1)$$

如圖:



最佳鄉土教材

｜050404｜斜向座標上皇后之研究

研究過程｜三、一邊有 n 個圓圈的正三角形棋盤最多可放置幾個皇后？

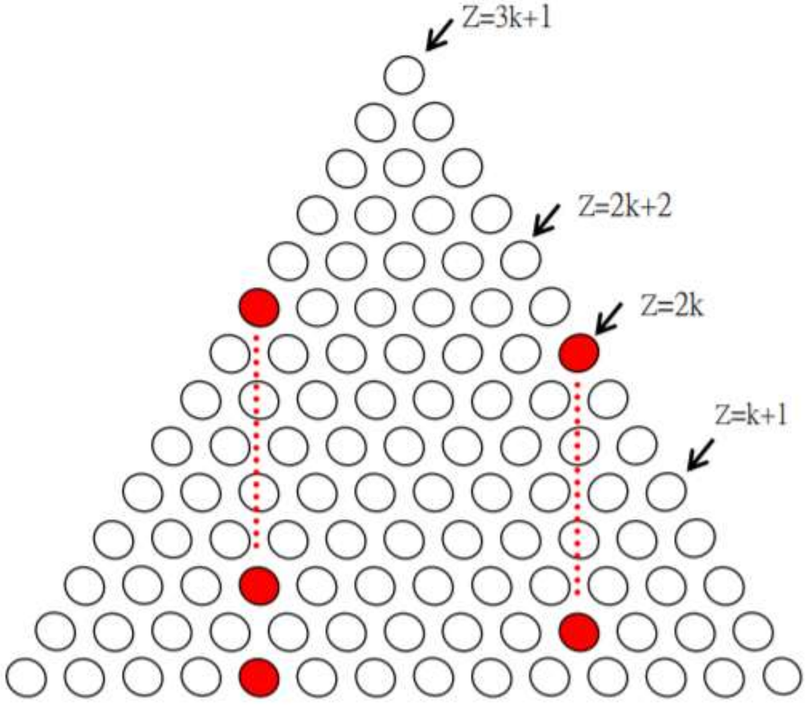
(二)一邊有(3k+2)個圓圈的正三角形棋盤，k 為 0 或正整數。

同 3k+1 的規則，我們選出如下皇后:

$(k+2,2k+1,3k+2)(k+4,2k,3k+1)(k+6,2k-1,3k)\ldots(3k+2,k+1,2k+2)$

$(k+3,3k+2,2k)(k+5,3k+1,2k-1)(k+7,3k,2k-2)\ldots(3k+1,2k+3,k+1)$

如圖：



｜050404｜斜向座標上皇后之研究

研究過程｜三、一邊有 n 個圓圈的正三角形棋盤最多可放置幾個皇后？

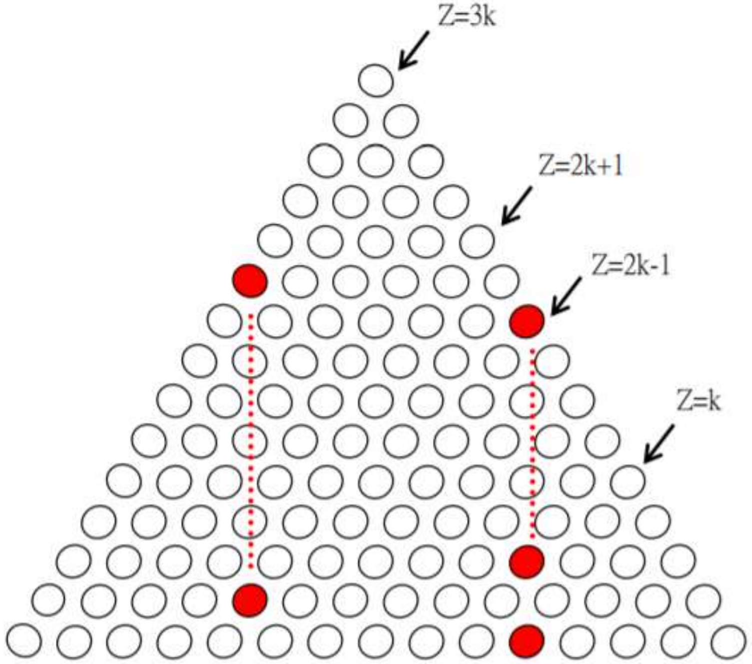
(三)一邊有 3k 個圓圈的正三角形棋盤，k 為正整數。

同 3k+1 的規則，我們選出如下皇后:

$(k+2,3k,2k-1)(k+4,3k-1,2k-2)(k+6,3k-2,2k-3)\dots(3k,2k+1,k)$

$(k+1,2k,3k)(k+3,2k-1,3k-1)(k+5,2k-2,3k+1)\dots(3k-1,k+1,2k+1)$

如圖:



｜050404｜斜向座標上皇后之研究

研究過程｜四、一邊有 n 個圓圈的正三角形棋盤最少放置幾個皇后可全部管轄

在最少的皇后數部分，即使透過程式也只能做出部分結果，由 n=1~20 的結果發現最少皇后數有可能是有規律的(在皇后數為 3 的次方時，會有連續三個 n 為相同皇后數，其餘皆為連續兩個相同)，如**下表**所示。我們先以討論法證出部分結果，證明過程詳見**附錄一**，未來希望能回歸座標法，即解出 **x+y+z=2n+1,0<x,y,z<n 時，所需留下的最少組數**。

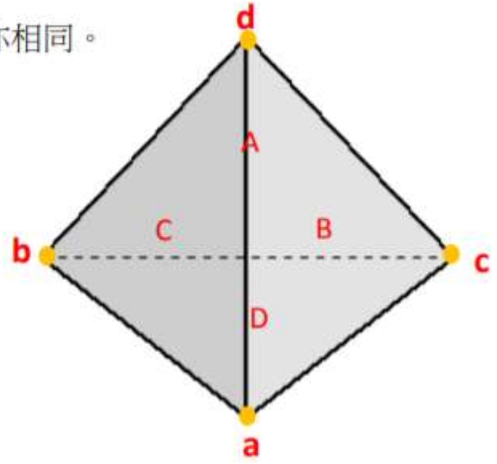
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	1	2	2	**3**	**3**	**3**	4	4	5
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	5	6	6	7	7	8	8	**9**	**9**	**9**

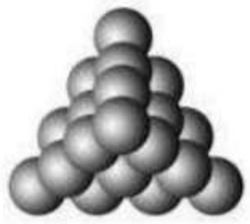
｜050404｜斜向座標上皇后之研究

研究過程｜五、正四面體上最多能放置幾個皇后？

平面座標上的最多皇后數解決，於是我們將棋盤再改為正四面體(如**右下圖**所示)，欲討論在此三角垛棋盤上最多能擺放幾個皇后。

為了思考此問題我們一樣先將立體棋盤座標化，先定義四個面為 A,B,C,D(如**左下圖**所示)，以 A 面方向為例:A 面底面為 A=4，向 a 點方向移動一面，則 A 減 1，由此規則定義出 A 座標。B,C,D 座標亦相同。





又因為每個方向皆由正四面體四個面中其中兩個面所夾出來的，所以正四面體中每個圓圈皆能管轄六個方向，定義其為$(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$，其中$x$為 A、B 的交線，$y$為 A、C 的交線，$z$為 A、D 的交線，$\alpha$為 B、C 的交線，$\beta$為 B、D 的交線，$\gamma$為 C、D 的交線。因此，定義$x$=A+B，$y$=A+C，

｜050404｜**斜向座標上皇后之研究**

最佳鄉土教材

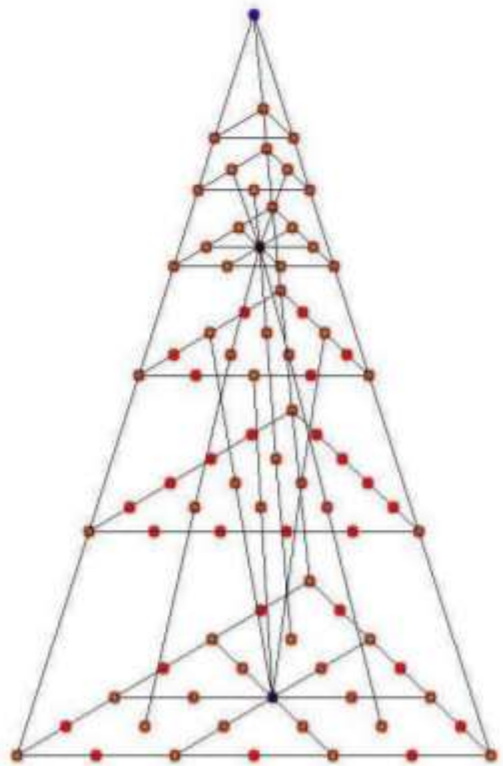
研究過程｜五、正四面體上最多能放置幾個皇后？

於是我們得到類似平面座標的式子: $x+y+z+\alpha+\beta+\gamma=$

$\mathbf{9n+3,\ n+1<}\ x,y,z,\alpha,\beta,\gamma < \mathbf{2n+1}$，**求所能留下的最多組數，**

即可得最大皇后數

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	1	2	4	7	11	16	21	27	34
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	41	49	58	67	77	88	100	112	125	139



最佳鄉土教材

050404｜斜向座標上皇后之研究

結論

一、解出皇后數後，我們發現此結果可套用到生活中以下應用:

(1)國防兵力部署

(2)警衛人力分配

(3)消防設施建置

(4)雲端醫療應用

(5)遊戲程式設計

二、未來發展

(一)將棋盤改成正多邊形。

(二)將棋盤改為非正多邊形，如：長方形、直角三角形、……。

(三)將棋盤改為正四面體以外的立體圖形，如：正方體，皇后可管轄到十二個方向。

(四)仿照八皇后問題，固定皇后數，研究在不同棋盤上有幾種不同解法

組員名單：
411031104　廖英秀
410731104　林政勳
410731107　王霆軒
410731120　許定閎
411031210　馬國凱

Thank you for watching