第七組

報告年度：103年度 第五十四屆數學組

組員：林咏勳,高新雄,江晁維,林鈺祐,楊荏喻

CONTENTS

一.

扭「轉」乾坤－以3X3盤面結構分析化簡轉珠遊戲並尋求最短步數

探討正n邊形的內接正三角形____________________________________p3-p10 江晁維

一筆畫圖形之最長路徑探討

動態追逐 ____________________________________p11-p16林鈺佑

一指點亮世界－點燈遊戲的探討

被禁錮的軌跡－探討簡諧動點之中心軌跡 ____________________________________p17-p22林咏勳

蜜蜂路徑-找回失落的數字

旋機-在會旋轉的平面和立方格子中選取塗色求塗法數____________________________________p23-p28高新雄

多邊形及中心多邊形自守數的尋找及性質探究

N 邊形內一定點與其頂點連線的神秘戀曲

變形楊式矩陣的探討 ____________________________________p29-p37楊荏喻

二.介紹專題

tri to 唯一(三角形唯一性之探討)____________________________________p38-p45共同完成

報告統整與編輯：林咏勳 高新雄

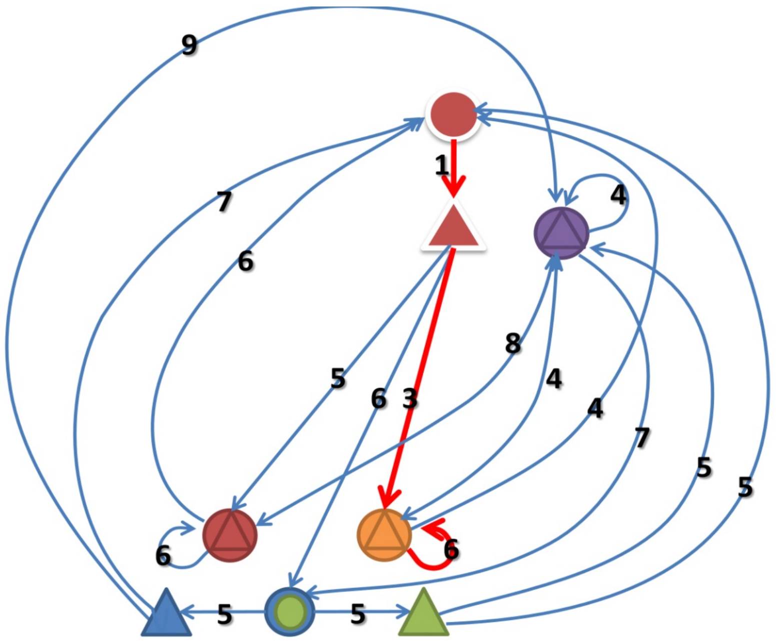
扭「轉」乾坤－以3X3盤面結構分析化簡轉珠遊戲並尋求最短步數

數學組最佳合作團隊獎

類別分析：組合學線性代數-矩陣

研究動機

2013 智慧型手機當道，也幾乎人手一台，各種 APP 遊戲爭奇鬥豔，其中一家遊戲公司曾經締造月營業額兩億元的紀錄，也拿下最受歡迎的遊戲 APP 蟬聯幾周冠軍，開始變成所有遊戲爭相模仿之對象，我們統稱這類遊戲為轉珠遊戲，顧名思義，遊戲是在有限的時間內，一個 5X6 的盤面中，有 5 種顏色的珠子，玩家任意挑一個珠子起手，藉由移動與相鄰珠子做位置交換，來達到使相同顏色之珠子三粒或三粒以上的排成一直線或橫線，排成一線後就可以消除，消除越多數目可以對敵人造成更多的傷害。這看似簡單的遊戲，卻隱含著極大的學問:有限的時間內，為了達成最高連續消除數的最短步數為何？是否存在唯一佳解呢？引發了我們的興趣



研究目的

找出最短步數可以達到消除最多珠子之路徑

肆、研究過程或方法

▲圖 1 遊戲畫面擷取圖

遊戲中，以轉珠遊戲為主要戰鬥主軸，次要是卡片蒐集，卡片分成五大屬性陣營：光、暗、火、水、木，存在的屬性相剋，水剋火、火剋木、木剋水、光剋暗、暗剋光，不同卡片有不同能力，藉由自身卡片組合搭配其他玩家的隊長，來達到攻擊最大化的效果。戰鬥中，消除紅色珠，即是火屬性卡片發動攻擊，藍色珠則是水，綠色珠則是木，紫色珠則是暗，黃色珠是光，粉紅色是心，用來補血用，敵人有自己的發動攻擊的回合數，敵人發動攻擊前先擊倒對手當然是最好的，萬一沒辦法短時間擊倒，則需要考慮卡片能力，或是卡片等級，或是轉珠能力(想辦法消除心屬性補血)，所以再進入關卡前，應想好剋敵之策略在選擇最適合的隊員再上陣。

遊戲中由於三個同顏色珠子連成一線(直或橫)或三個以上連續不斷就可以消除，通常新手在玩的時候，在有限的時間內，最少有能力至少做到三同色珠排成一直線，但從何處當起手點下手，該怎麼走才能達到最多消除數，這其實是一門大學問，最直觀的就是我們把盤面所有可能之排列組合列出來，然後分析哪一條路徑最短，消除數又最多者，就是我們的最佳解。

於是我們先從三顆珠子之相對情況研究起(因為最少 3 個連直線才能消除)，我們先於 3X3 之盤面來做探討，假設 3X3 的盤面內只有一種同色的三顆珠其餘皆是雜色珠，其排列組合的圖形結果有 $C_3^9 \times \frac{1}{4}$ =21 種(旋轉不算)，平移應列為不同之兩圖形，如下圖所示，但我們發現

我們嘗試不同的起手點歸納，最短路徑之步數，整理如圖 8

6	5	5	4	5
5	4		3	4
6		1	2	3
5	4		3	4
6	5	5	4	5

▲圖 8 ，ㄑ型之最短步數分析圖

若將其看成一矩陣 $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ，可以看出 a_{22} 與 a_{21} 以及 a_{31} 為連續整數之等差數列，

我們視為一種相依情形，例如:如果以 a_{31} 當起手點的話，要走最短路徑，必然一定過經過 a_{21} 再到達 a_{22} ，或是經過 a_{41} 再到達 a_{42} ，然後再花 4 步完成此圖型，依此類推 a_{33} 與 a_{34} 以及 a_{44} 也是一種相依情況， a_{22} 與 a_{42} 、 a_{33} 並無相依，所以我們稱這 3 點都是該圖型的起點。然後我們深入仔細分析，以這 3 點作起手點當作移動的起點，移動方向不盡相同，完成圖形後，對應之終點也不盡相同，所以我們更進一步將其所有起點與終點標示出來。如圖 9 所示，稱起點為完成該圖形之入口，終點為完成該圖形之出口。

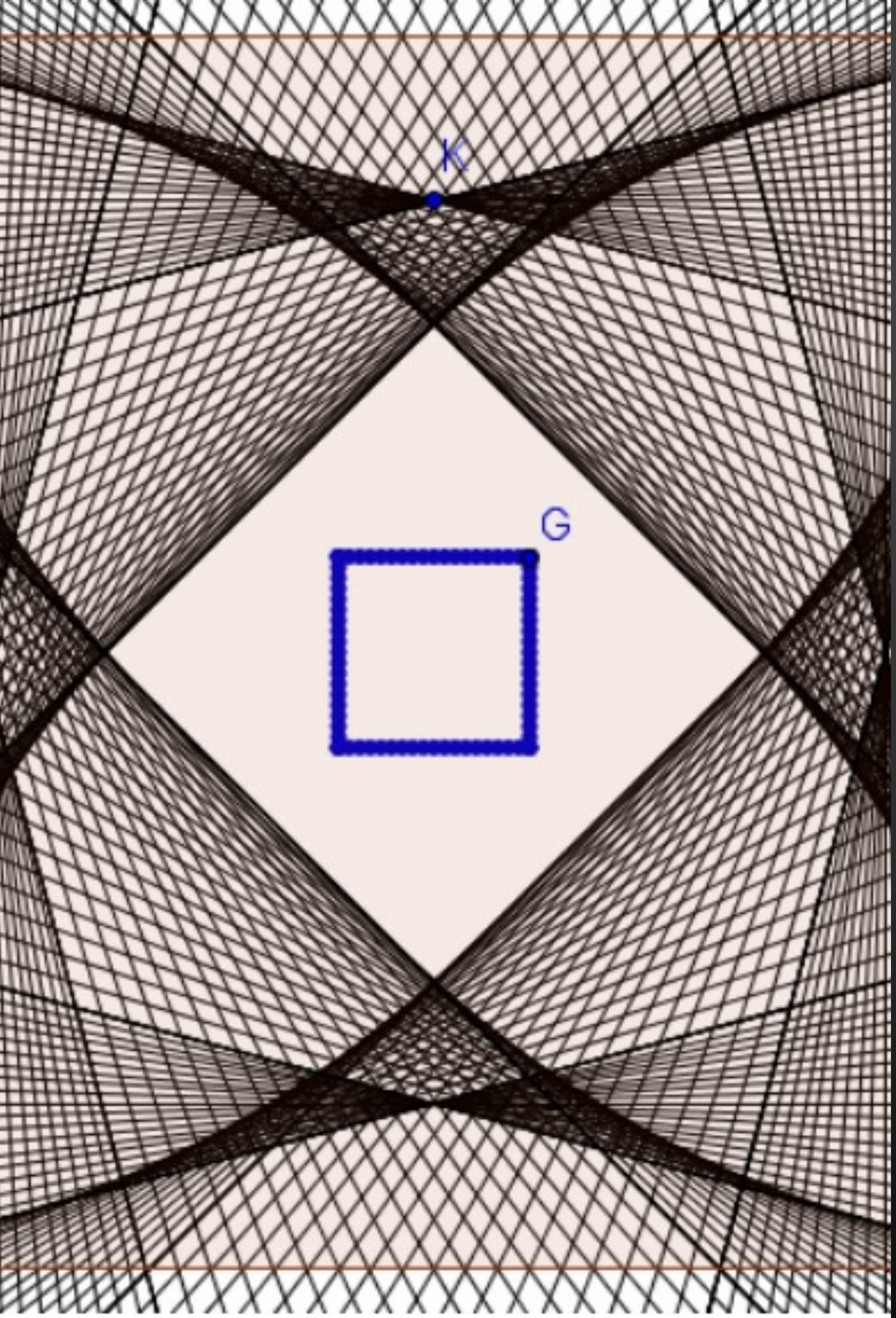
6	5	5	4	5
5	4		3	4
6		1	2	3
5	4		3	4
6	5	5	4	5

▲圖 9，ㄑ型最短步數以及出入口圖(○:表示入口 △:表示出口)

探討正n邊形的內接正三角形

數學組第一名

類別分析：三角函數幾何學



研究動機

題目是和同學討論 101 年學測考題時，所得到的靈感，原題目是在正三角形的每一個邊之兩個三等分點中各選一點連成三角形的問題，選項中說明只能連出兩個正三角形。接著，我們定義三個頂點分別在正n邊形三個不同邊上的正三角形為此正n邊形的內接正三角形，進而好奇的想知道正n邊形之內接正三角形是否存在?可否作圖？故事就從這裡開始。

研究目的

一.每一個正n邊形是否皆有無限多個內接正三角形呢?

二.對於在正n邊形的邊上的任意一點 P ， 是否恰能在其邊上找到唯一一組　 點 R，使得△PQR為該正n邊形的內接正三角形呢?

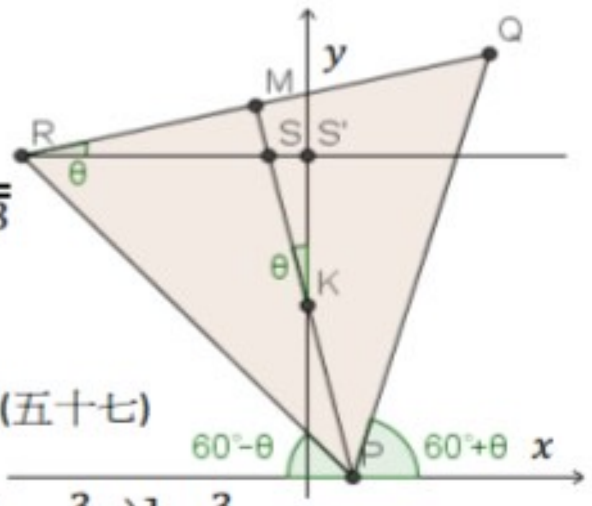
三.對於在正n邊形的邊上的任意一點，找出它的內接正三角形的作圖方式。

四.將正n邊形的每一個內接正三角形全都畫出後，研究畫出的圖形之特殊性質。

作圖如右(圖(五十七))

則$\triangle RMS \sim \triangle KS'S$ (AA)，因此$\angle QRS = \angle SKS' = \theta$

故$\overleftrightarrow{QR}$：$y = \tan\theta\left[x - \tan\theta\left(k - \dfrac{\sqrt{3}b}{a+\sqrt{3}}\right)\right] + \dfrac{\sqrt{3}b}{a+\sqrt{3}}$



圖(五十七)

令$\tan\theta = \alpha$，又$\dfrac{\sqrt{3}b}{a+\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2}h$

$\therefore \overleftrightarrow{QR}$：$y = \alpha\left[x - \alpha\left(k - \dfrac{3}{2}h\right)\right] + \dfrac{3}{2}h$

將$|\alpha|$稍微增大，得$\overleftrightarrow{Q'R'}$：$y = (\alpha+\varepsilon)\left[x - (\alpha+\varepsilon)\left(k - \dfrac{3}{2}h\right)\right] + \dfrac{3}{2}h$

解$\begin{cases} y = \alpha\left[x - \alpha\left(k - \dfrac{3}{2}h\right)\right] + \dfrac{3}{2}h \\ y = \left[x - (\alpha+\varepsilon)\left(k - \dfrac{3}{2}h\right)\right] + \dfrac{3}{2}h \end{cases}$

$\Rightarrow [(\alpha+\varepsilon) - \alpha]x = (\alpha+\varepsilon)^2\left(k - \dfrac{3}{2}h\right) - \alpha^2\left(k - \dfrac{3}{2}h\right)$

$\Rightarrow x = \left(k - \dfrac{3}{2}h\right)\dfrac{(\alpha+\varepsilon)^2 - \alpha^2}{\varepsilon} = \left(k - \dfrac{3}{2}h\right)(2\alpha+\varepsilon)$

令$\varepsilon \to 0$，則$x = \left(k - \dfrac{3}{2}h\right)\cdot 2\alpha$

故$y = \alpha\left[x - \alpha\left(k - \dfrac{3}{2}h\right)\right] + \dfrac{3}{2}h = \left(k - \dfrac{3}{2}h\right)\alpha^2 + \dfrac{3}{2}h$

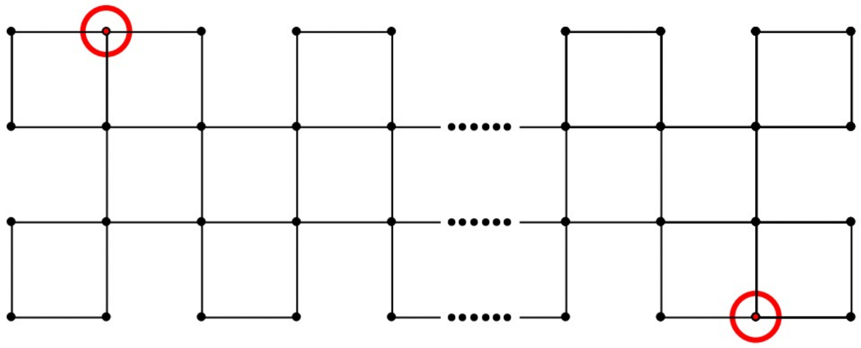
一筆畫圖形之最長路徑探討

數學組第三名

類別分析:排列組合(組合數學)

研究動機

在一本有關介紹數學遊戲的書中，發現到如何在 m*n 點方陣中，用一筆畫連出最多條線段，且路徑不重複，也禁止斜走



研究目的：

一.探討 m × n 點方陣中，一筆畫連出的線段最大值。

二.探討 a × b × c 點方塊中，一筆畫連出的線段最大值。

三.探討 3 × n 點方陣中，一筆畫連出最大線段長的走法數。

四.探討 4 × n 點方陣中，一筆畫連出最大線段長的走法數。

五.探討 5 × n 點方陣中，一筆畫連出最大線段長的走法數。

動態追逐

數學組第三名

類別分析：幾何　三角函數

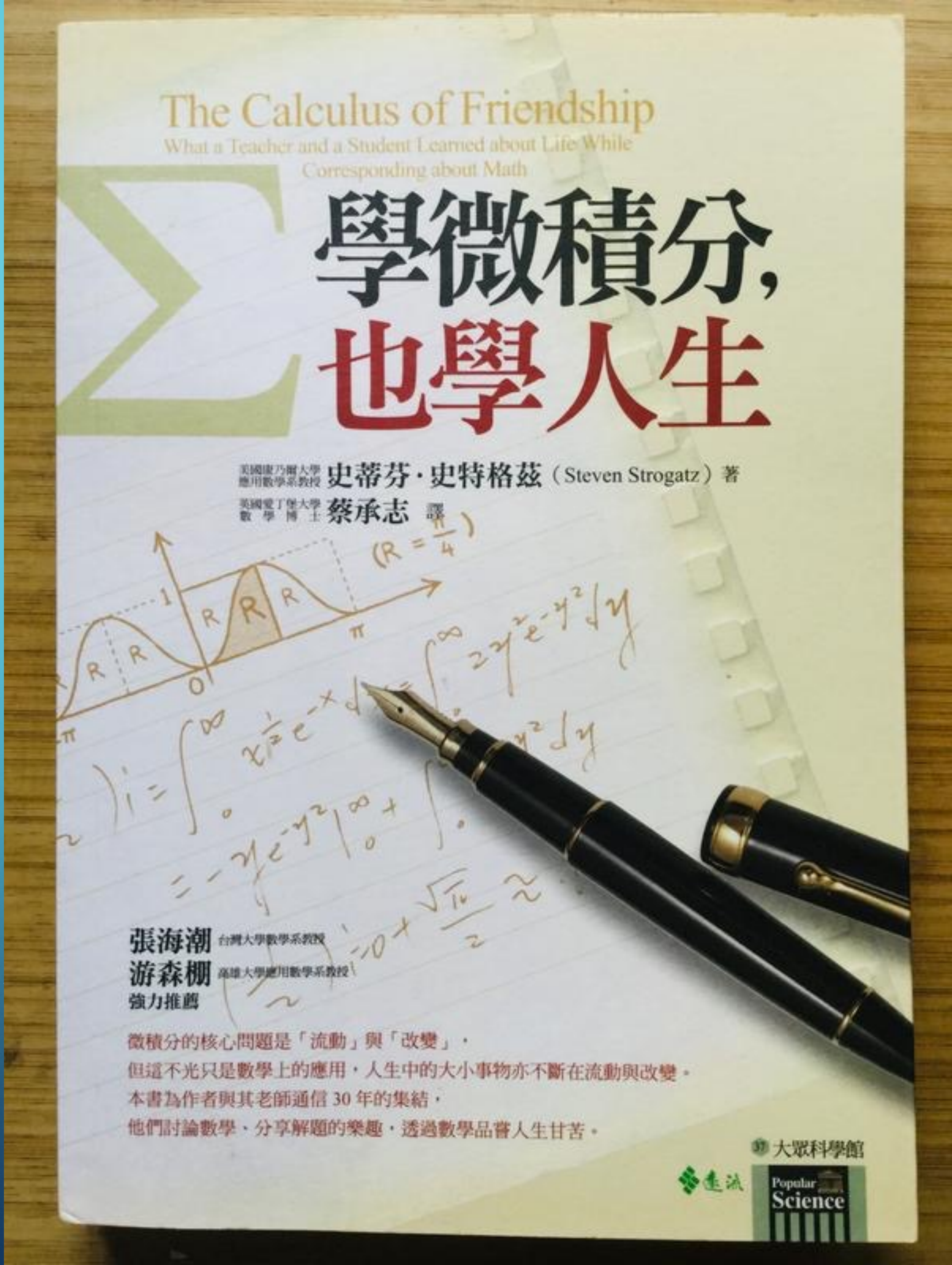
研究動機

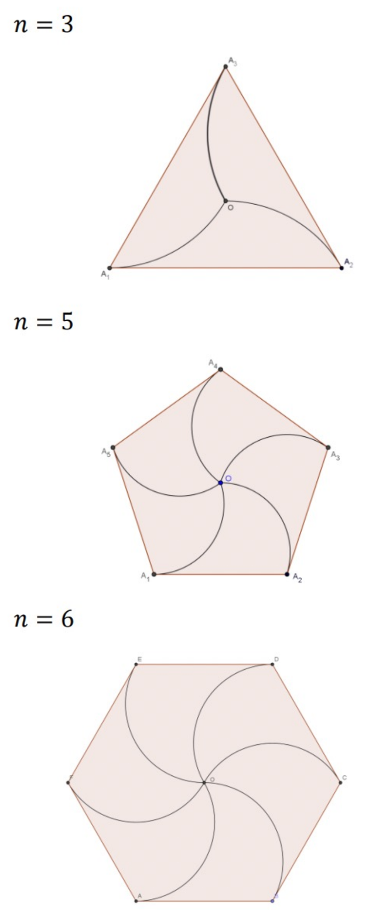
從「學微積分，也學人生」這本書看到許多討論，分別有：

一邊長為l的正方形，四隻狗位於四頂點，每一隻狗以往其逆時針方向的下一隻狗的方向等速 率前進，方向無時無刻都朝著下一隻狗，最後會停在中心。

每隻狗移動的軌跡為角度為 π/4 的等角螺旋(對數螺旋)，所經路徑長以微分方程及線積分計算後為l ，並探討其追逐的圖形。

同時也重新定義為: 每質點的**總位移**方向均指向往其逆時針方向的下一個質點且每質點均保持等速率，換言之，**出發點**、**質點**、**目標點**三點恆在一直線上，進而推廣新的追逐問題。





研究目的

動態追逐問題

1.質點做正n邊形動態追逐的軌跡方程式及路徑長

2.質點做正n邊形動態追逐時質點間的相對軌跡

3.質點做n邊形動態追逐的軌跡方程式

4.質點做單向追逐的軌跡方程式

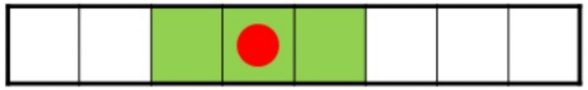
5.質點做圓形追逐的軌跡方程式

最後希望能將動態追逐推廣至三維空間，並將所有問題推廣發展成另一類新的追逐問題

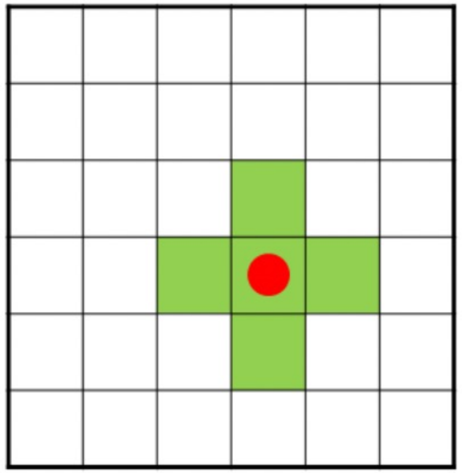
一指點亮世界－點燈遊戲的探討

數學組最佳鄉土教材獎

類別分析：排列組合



圖(一)



圖(二)

研究動機

原遊戲規則： 每個格子代表一個燈泡，有亮與暗兩種狀態，當按下某格時會改變自己及相鄰 格的亮暗狀態

如圖(一)為一維的情況，當按下標有紅色圓圈記號的格子時，會改 變綠色部分格子的狀態。

圖(二)為二維的情況。遊戲一開始有些格子亮，有些暗，最終目的是將全部格子變亮。

研究目的

一、一維 2 循環狀態下有解與否之判定。

二、二維 2 循環狀態下有解與否之判定。

三、n 維(n≥3) 2 循環狀態下有解與否之判定。

四、一維 g 循環狀態下有解與否之判定。

五、n 維(n≥2) g 循環狀態下有解與否之判定。

六、n 維(n∈N) g 循環狀態下有解時之解法數。

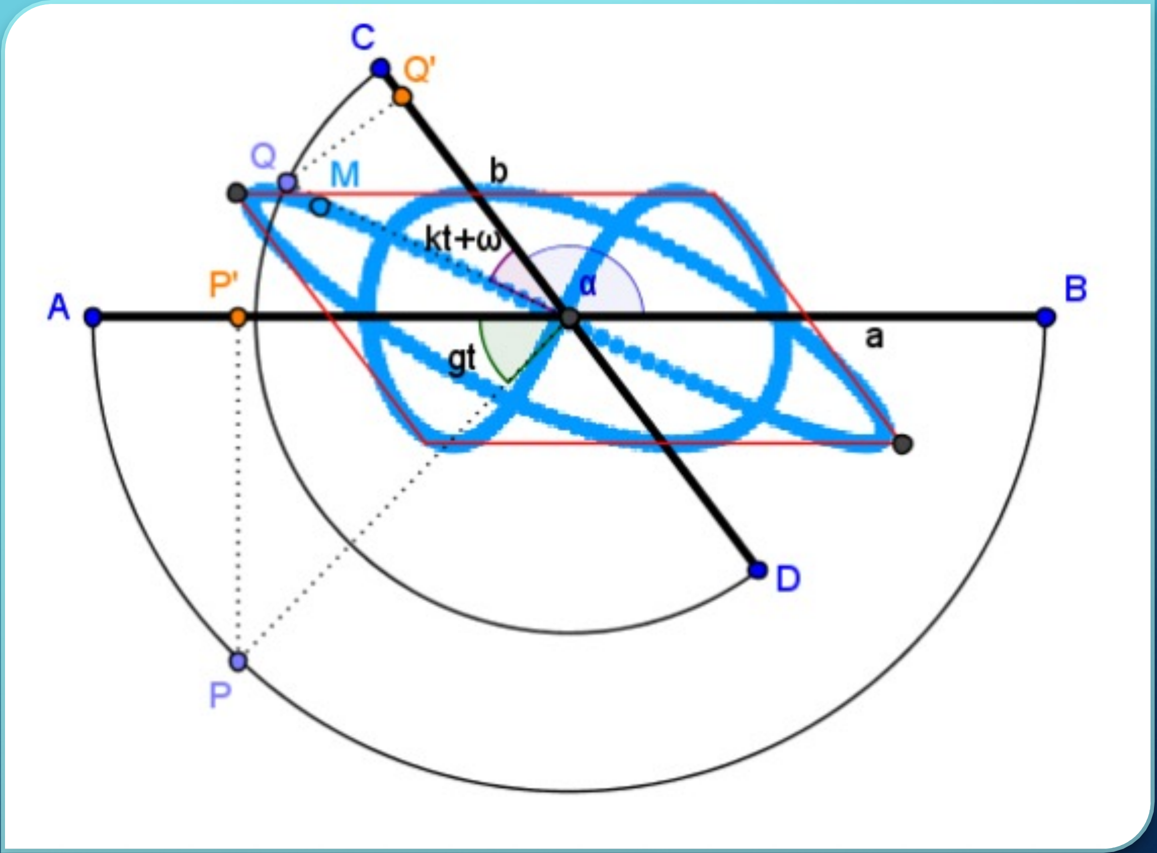
被禁錮的軌跡－探討簡諧動點之中心軌跡

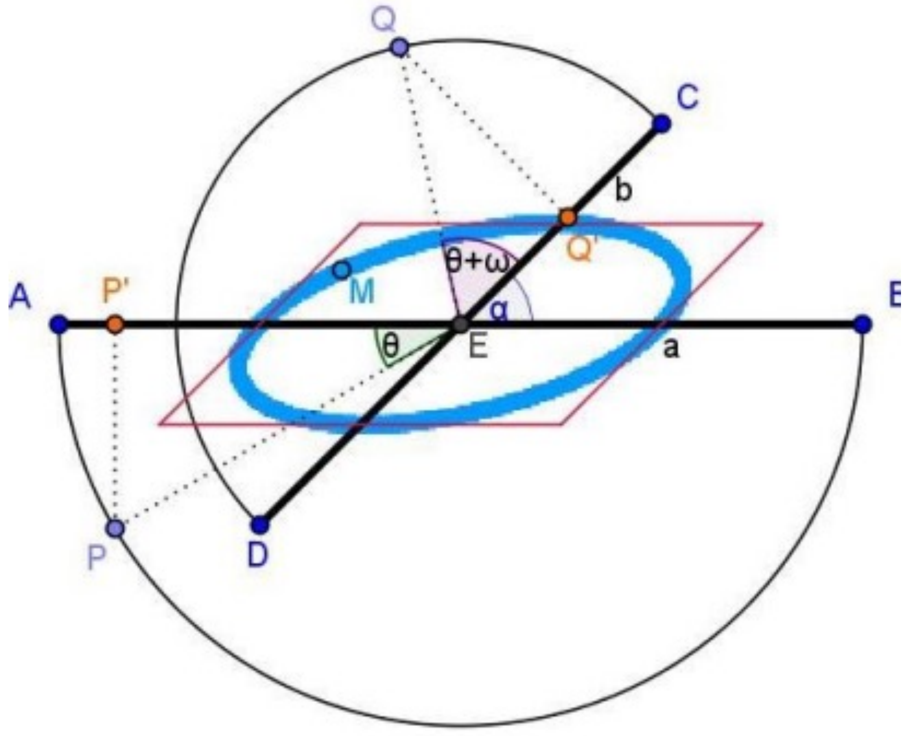
數學組佳獎

類別分析：圓與斜率

研究動機

有一次上數學課時，老師給我們看一個有趣的圖，圖上為兩分別在不同線段上以相同角 速度做簡諧運動的點，當起始角度相等時，其中點軌跡為一斜線段，而當起始角度不同時， 軌跡為一橢圓。我們覺得很有趣，並好奇在其他條件下，平面上各自作簡諧運動的點究竟可 以迸出什麼樣的火花？於是我們使用 geogebra 繪圖，改變各種變因，沒想到意外地觀察到許多有趣的現象．





$\omega = 90°$

研究目的

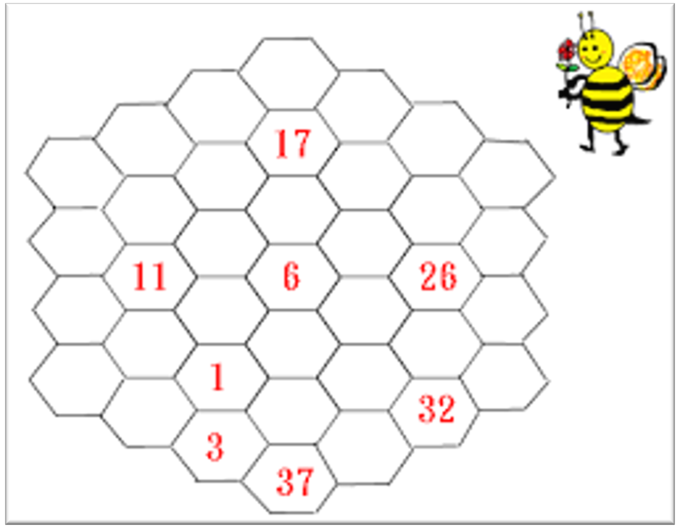
一、 求出兩點在兩線段作簡諧運動的中點軌跡移動範圍及方程式，並研究軌跡由橢圓退化 成圓或直線的條件

二、 探討兩線段相交於中點、一端點重合、交於一點（非中點或端點）以及不相交四種情 形中點軌跡之間的關聯 三、 討論在三線段上各自作簡諧運動的三點之重心軌跡圖形及圖形中心點 四、 探討 k 個動點時的軌跡圖形 五、 加上質量不同的條件探討質量中心的軌跡

蜜蜂路徑－找回失落的數字

數學組佳作

類別分析:n 階方陣



研究動機

偶然在聯合報上發現一種類似數獨的遊戲-蜜蜂數字，遊戲設計者先在部分格子中給定特定數字，然後由玩家將剩餘數字填入剩下的格子內，不過蜜蜂數字填數字的規則是：『從1開始，以相鄰且不間斷的方式將數字填入格子內』在嘗試了這個遊戲後，我們不禁好奇：它事先給定的數字，真的能造成唯一的解答嗎？而在這樣的圖形內，最少要事先給玩家幾個數字才可能使解答唯一？其解答也可視為一筆畫路徑的方法。

研究目的

對於一個 $n \times n$ 方陣，設計一個 $\{1,2,3,\cdots,n^2\}$ 的子集合 S_n ，並將 S_n 中的數字預先安排在方陣中特殊的位置，滿足下列兩個條件：

（1） 能將其餘數字 $\{1,2,3,\cdots,n^2\}-S_n$ 也填入同一個被 S_n 佔據部分位置的方陣中時，相鄰的自然數可被安排在方陣中相鄰的位置，且填入方法唯一。

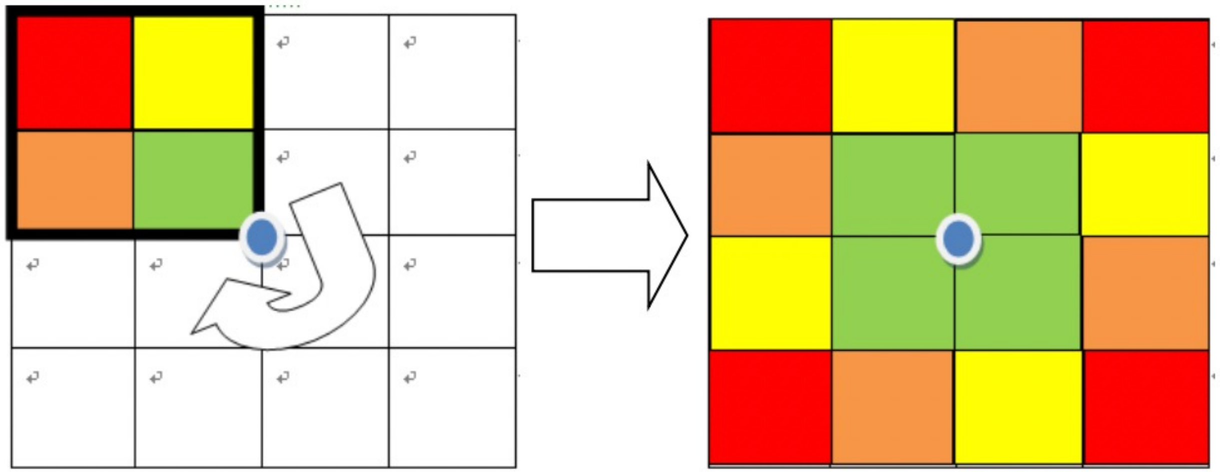
（2） 若在此方陣中刪除 S_n 中任意一個數字，皆會造成其餘數字填入的方法不唯一。

對於這個特殊的子集合 S_n ，我們欲說明存在一種策略，能將 S_n 中的數字預先填入 n 階方陣的特殊位置，並且能滿足上述兩個條件。

旋機－在會旋轉的平面和立方格子中選取塗色求塗法數

數學組第三名

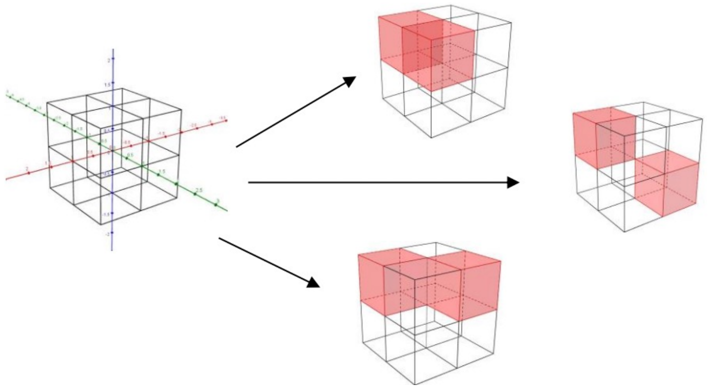
類別分析:遞迴和排列組合



研究動機

　　我們覺得1996 AIME 的第 7 題很有趣，可以用遞迴和排列組合等課堂上學過的觀念研究，或許可以延伸，於是進行探討。

研究目的



1. 在可旋轉的白底 7×7 方陣上，塗 2 格相同顏色的塗法數。

2. 承 1，推廣至任意 n × n 可旋轉的的方陣上塗 x 格(x≥ 2)。

3. 推廣至 m × n 可旋轉的長方形上塗 x 格(x≥ 2)。

4. 推廣至正六邊形上塗 x 格(x≥ 2)。

5. 在可旋轉的立方體，塗兩格立方格。

6. 在立方體中塗立方格上六個表面中的兩格

多邊形及中心多邊形自守數的尋找及性質探究

數學組佳作

類別分析：幾何 組合

研究動機

- 在老師推荐的科普書「數字的異想世界」中，記載了兩個有趣的類似問題。依照圖 1 及圖 2 的排列方式：當我們需要排成「第 n 個圖形，每邊有 n 個點的空心正六邊形堆疊」，以及「第 n 個圖形，由內向外堆疊，每邊有 n 個點的實心正六邊形」時，各需要多少個點？更進一步：求出所需的點數量後，有哪些邊長的六邊形，它們所需點的數量，尾數恰好與 此時每邊的點個數相同？

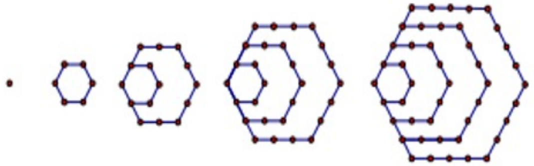


圖 1：空心六邊形堆疊

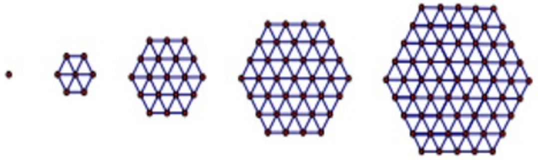
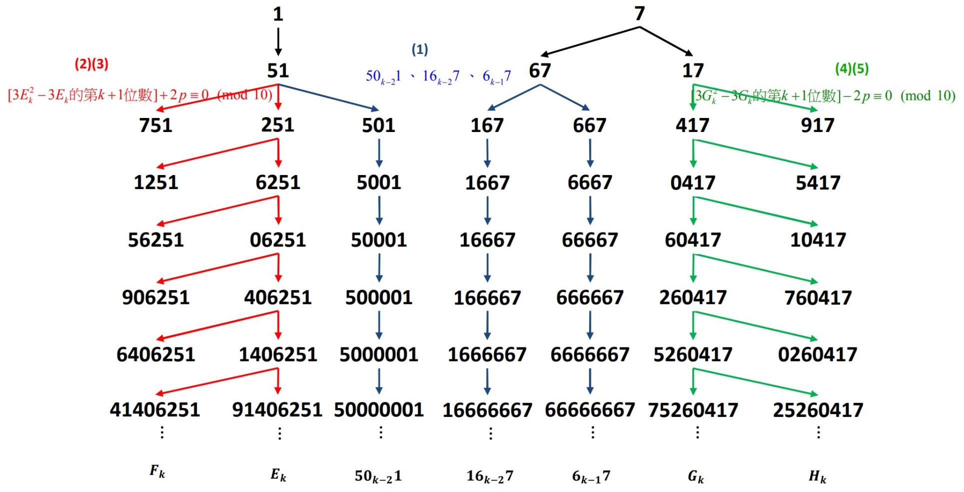


圖 2：實心六邊形堆疊

- 這引發了我們的興趣，首先解決文獻中尚不完整的資料問題，嘗試尋找出所有滿足條 件的 n 值(六邊形與中心六邊形自守數)，將s □ 3, 4,5,6的情形一併找完；再者將結論擴充， 找出任意s邊形與中心s邊形自守數的出現特性。

研究目的



一、找出s = 3, 4,5,6的多邊形自守數。

二、找出s = 3, 4,5,6中心多邊形自守數。

三、找出s邊形與中心s邊形自守數的出現特性。

N 邊形內一定點與其頂點連線的神秘戀曲

最佳創意獎

分析類別：幾何

研究動機

學校課程中，老師教我們使用數學繪圖軟體 Geogebra 繪製一些平面上的幾何圖 形，透過實驗與觀察重新驗證一些平面幾何上的結果，我們做了許多數學實驗，發現這套軟 體除了容易操作外，重要的是操作起來讓我們覺得很有趣，因為它可以快速實驗考慮多種變化的情形。

我們檢驗了一下這個幾何定性性質，接著我們就想說有沒有機會將它推廣到任意多邊形的情形，我們用了軟體先行檢驗一番，發現任意的凸四邊形內只有一些 P 點會保持這個性質成立，所以我們退而求其次，先考慮正多邊形的情形，從正方形、正五邊形、正六邊形、正七邊形與正八邊形，一直到一般化的正2n (n ≥ 2) 邊形與正

2 1 n – (n ≥ 2)邊形，一步一腳印,邊數由小至大，探索過程之中，除了軟體作圖、紙 筆計算外，並給予嚴謹的證明，慢慢地我們發現其中的奧妙與規則，最後，我們發現正多邊 形內的任一點 P 都可以維持這樣的定性性質，只是數個比值相加後之定值不再是 1，而是會 隨著邊數的不同而有所改變，幸運的是我們可以給出這個定值的一般化公式。

研究目的

一、將『引理一』中三角內的一點P 移至三 角形外，觀察驗證對應的定性性質。

二、『引理一』在正方形中的推論。

三、『引理一』在正五邊形中的推論。

四、『引理一』在正六邊形中的推論。

五、『引理一』在正八邊形中的推論。

六、『引理一』在正2n (n ≥ 2)邊形中的推論。

七、『引理一』在正2 1 n − (n ≥ 2)邊形中的推論。

八、『引理一』在正六面體中的推論。

九、『引理一』在正八面體中的推論。

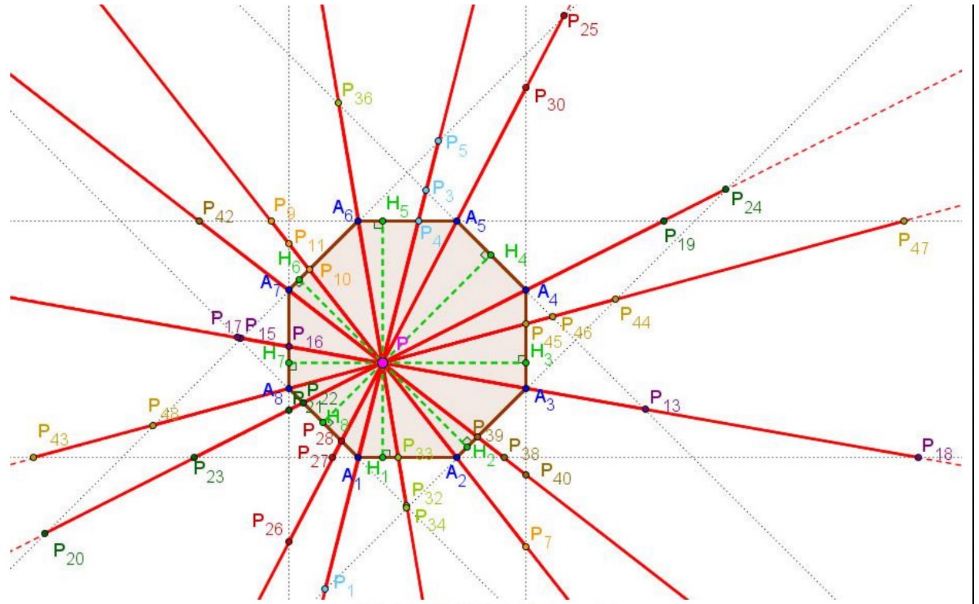


圖 7-2 (將圖 7-1 放大一些)

變形楊式矩陣的探討

數學組佳作

分析類別：幾何 組合

研究動機

一開始接觸到楊氏矩陣是在學排列組合的時候，有個題目是關於楊氏矩陣的， 那時候解題方法是用分類討論來求的，但過程真的蠻麻煩的，後來上網查才知道其實楊氏矩陣直接有公式可以解，那時候就看到相關聯結寫著歪斜矩陣，就起了 興趣，原來歪斜矩陣還沒有類似的公式，想說就算沒有對普遍狀況的通用公式， 對於特定圖形應該會有公式可用，所以就開始研究起這份報告。

研究目的

一.就一些基本的歪斜矩陣進行性質探討

二.找出某些特定形狀的歪斜矩陣排列方法數的計算方法

三.把原本的歪斜矩陣做延伸，找出計算方法的變化

tri to 唯一(三角形唯一性之探討)

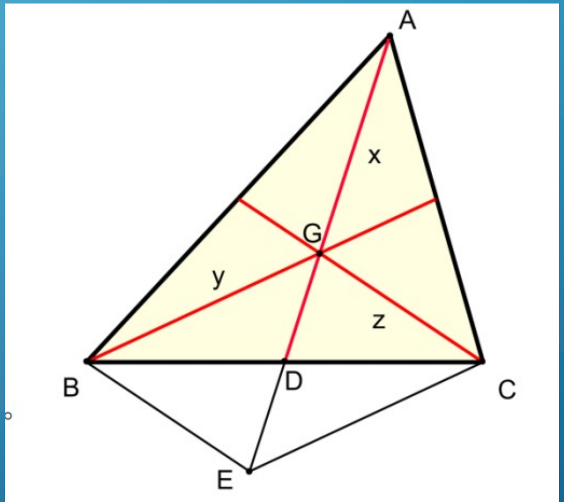
數學組第二名

類別分析：三角

研究動機

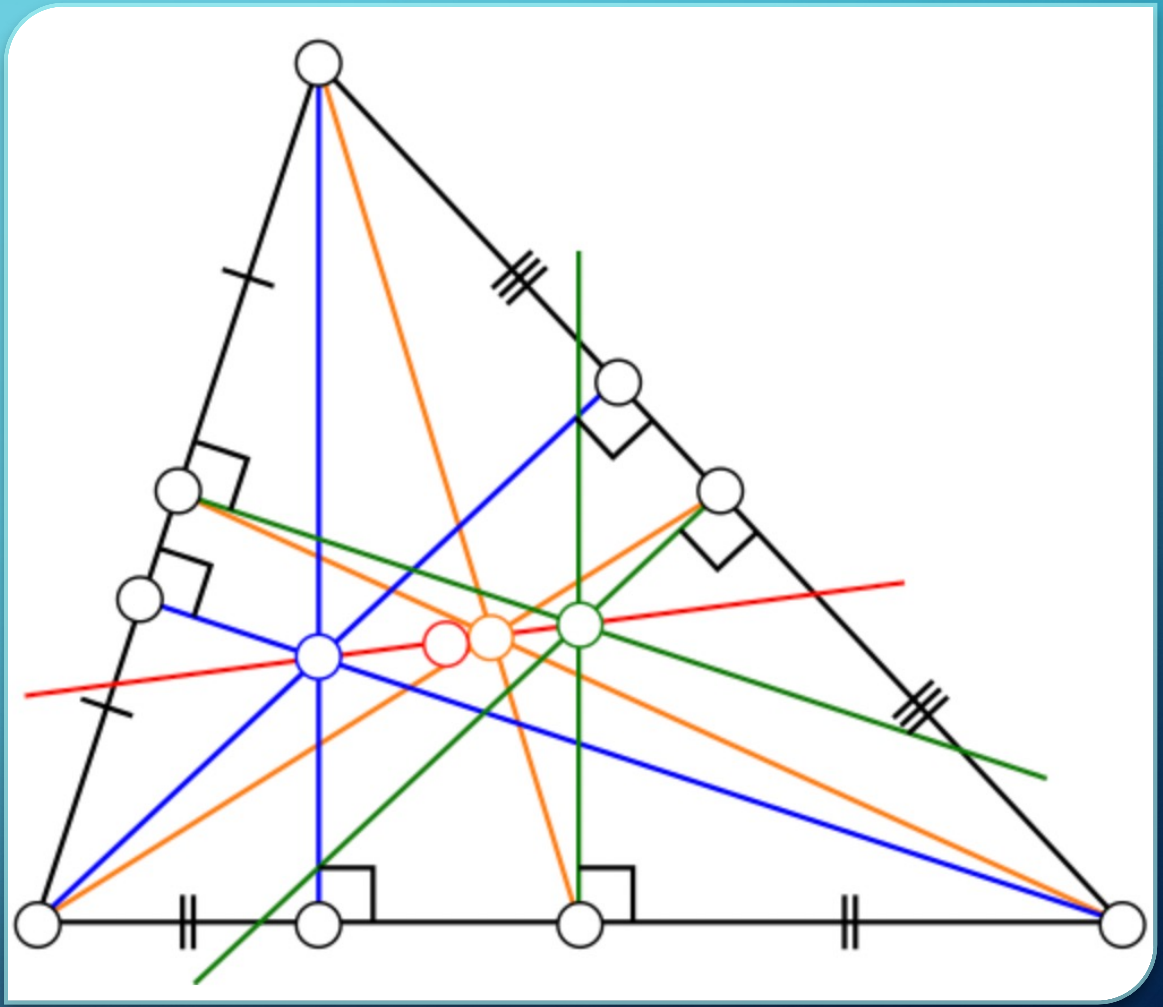
曾在第三冊第一章總複習的練習卷上，做過一道題目：已知三角形之三高分別為 2 , 3 , 5，是否可決定唯一的三角形？隨後，又在其他的練習卷上，遇到下列題目：設 G 為 △ ABC 的重心，且

GA = 2 , GB = 3 , GC = 5 , 則 GB GC + GC GA = ? 老師說此題條件有誤，因為題幹所敘述的三角形是不存在的。由這兩個楔子，致使我們小組的成員對這一類的問題產生了濃厚的興趣。 究竟在何種條件下三角形才存在？在何種條件下可決定唯一的三角形？又此三角形該 如何描述它？於是我們展開了下列的研究。



研究目的

從研究動機的兩則題目中我們發現：五心(重心、垂心、內心、外心、旁心)與所給的條件， 是決定三角形存在性與唯一性的關鍵。 本研究的目的主要是以**重心、垂心、內心、外心、旁心為分類**，討論在各種給定的條件 下，三角形的存在性、唯一性，並試著去描述此三角形。



給定x,y,z對應的量	$\triangle ABC$存在的條件	$\triangle ABC$是否唯一
垂心到三頂點的距離	$x \geq y = z > 0$	是
	$x \geq y > z = 0$	是
	$x \geq y > z > 0$	否(兩種)
垂心到三邊的距離	$x = y \geq z > 0$	是
	$x > y \geq z > 0$	否(兩種)
	$x > y = z = 0$	否(無限多種)
三角平分線長	$x \geq y \geq z > 0$	是
內心到三頂點的距離	$x \geq y \geq z > 0$	是
內心到三邊的距離	$x = y = z > 0$	否(無限多種)
外心到三頂點的距離	$x = y = z > 0$	否(無限多種)
外心到三邊的距離	$x \geq y = z > 0$	是
	$x \geq y > z = 0$	是
	$x \geq y > z > 0$	否(兩種)
三頂點過外心到對邊的長度	$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{3}{z}, \frac{1}{x}+\frac{1}{z}<\frac{3}{y}, \frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{3}{x}$	是
某旁心到三頂點的距離	$x > y \geq z > 0$	是
三旁心到對應頂點的距離	$\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ 構成銳角三角形	是
三旁心到對應邊的距離	$x \geq y \geq z > 0$	是

我們知道△ ABC 決定了唯一的重心、垂心、外心、內心，而且這些心到三頂點(或三邊) 的距離 x y z , , 被唯一決定了。本篇主題為探討類似上述敘述的逆敘述，並用勘根定理將 △ ABC 的三邊長以 x y z，去描述。 我們分別以 abc , , 表示△ ABC 中 角A B C , ,之對邊長，且以 x y z , , 表示特殊給定的長 度，其中 x大於等於y大於等於z大於等於0。經過研究，我們截取部分重要結果如左圖所示。

討論歸納

一、重心

x,y,z 對應的量	$\triangle ABC$ 存在的條件	是否唯一	$\triangle ABC$ 描述 (三邊長)
三中線長	x,y,z 滿足三角不等式	是	$a=\sqrt{(8y^2+8z^2-4x^2)/9}$，$b=\sqrt{(8x^2+8z^2-4y^2)/9}$ $c=\sqrt{(8x^2+8y^2-4z^2)/9}$
重心到三頂點的距離	x,y,z 滿足三角不等式	是	$a=\sqrt{2y^2+2z^2-x^2}$，$b=\sqrt{2z^2+2x^2-y^2}$ $c=\sqrt{2x^2+2y^2-z^2}$
重心到三邊的距離	$\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ 滿足三角不等式	是	$a=\frac{6}{\lambda}\cdot\frac{1}{x}$, $b=\frac{6}{\lambda}\cdot\frac{1}{y}$, $c=\frac{6}{\lambda}\cdot\frac{1}{z}$ (註)

二、垂心

x,y,z 對應的量	$\triangle ABC$ 存在的條件	是否唯一	$\triangle ABC$ 描述 (三邊長)
三高	$\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ 滿足三角不等式	是	$a=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{x}$, $b=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{y}$, $c=\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{1}{z}$ (註)
垂心到三頂點的距離	$x \ge y = z > 0$	是	$a = x\tan A , b = y\tan B , c = z\tan C$
	$x \ge y > z = 0$	是	$a = y , b = x , c = \sqrt{x^2+y^2}$ (是直角三角形)
	$x \ge y > z > 0$	否	銳角三角形時： $a = x\tan A , b = y\tan B , c = z\tan C$ 鈍角三角形時： $a = x\tan A , b = y\tan B , c = -z\tan C$
垂心到三邊的距離	$x = y \ge z > 0$	是	$a = x\cdot\frac{\sin A}{\cos B\cos C} , b = y\cdot\frac{\sin B}{\cos A\cos C} , c = z\cdot\frac{\sin C}{\cos A\cos B}$
	$x > y \ge z > 0$	否	銳角△： $a = x\cdot\frac{\sin A}{\cos B\cos C} , b = y\cdot\frac{\sin B}{\cos A\cos C} , c = z\cdot\frac{\sin C}{\cos A\cos B}$ 鈍角△： $a = x\tan B + xtanC , b = (x - y\sec C)\csc C$ $c = (x - z\sec B)\csc B$
	$x > y = z = 0$	否	$\triangle ABC$ 有無限多解，但三邊長要滿足 $ax = bc$

三、內心

x,y,z 對應的量	$\triangle ABC$ 存在的條件	是否唯一	$\triangle ABC$ 描述（三邊長）
三角平分線長	$x\ge y\ge z>0$	是	a,b,c 為滿足 $x^2=bc[1-(\frac{a}{b+c})^2]$ ，$y^2=ac[1-(\frac{b}{a+c})^2]$ $z^2=ab[1-(\frac{c}{a+b})^2]$ 的唯一解
內心到三頂點的距離	$x\ge y\ge z>0$	是	$a=\sqrt{y^2-r^2}+\sqrt{z^2-r^2}$ ，$b=\sqrt{z^2-r^2}+\sqrt{x^2-r^2}$ $c=\sqrt{x^2-r^2}+\sqrt{y^2-r^2}$ ，其中 r 為內切圓半徑
內心到三邊的距離	$x=y=z>0$	否	無限多解

四、外心

x,y,z 對應的量	$\triangle ABC$ 存在的條件	是否唯一	$\triangle ABC$ 描述（三邊長）
外心到三頂點的距離	$x=y=z>0$	否	無限多解
外心到三邊的距離	$x\ge y=z>0$	是	$a=2x\tan A$, $b=2y\tan B$, $c=2z\tan C$
	$x\ge y>z=0$	是	$a=2y$, $b=2x$, $c=2\sqrt{x^2+y^2}$ （是直角三角形）
	$x\ge y>z>0$	否	銳角三角形時： $a=2x\tan A$, $b=2y\tan B$, $c=2z\tan C$ 鈍角三角形時： $a=2x\tan A$, $b=2y\tan B$, $c=-2z\tan C$
三頂點過外心到對邊的長度	銳角 $\triangle ABC$ $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{3}{z}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}<\frac{3}{y}\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{3}{x}\end{cases}$	是	$a=2xyz\sqrt{\frac{3yz-xz-xy}{(xy+yz-xz)(yz+xz-xy)(xy+yz+xz)}}$ $b=2xyz\sqrt{\frac{3xz-yz-xy}{(xy+xz-yz)(yz+xz-xy)(xy+yz+xz)}}$ $c=2xyz\sqrt{\frac{3xy-xz-yz}{(xy+yz-xz)(xy+xz-yz)(xy+yz+xz)}}$

五、旁心

x,y,z 對應的量	△ ABC 存在的條件	是否唯一	△ ABC 描述 (三邊長)
某旁心到三頂點的距離	$x>y\geq z>0$	是	$a=\sqrt{y^2-r^2}+\sqrt{z^2-r^2}$，$b=\sqrt{x^2-r^2}-\sqrt{z^2-r^2}$ $c=\sqrt{x^2-r^2}-\sqrt{y^2-r^2}$，$r$ 為 $\angle A$ 所對旁切圓半徑
三旁心到對應頂點的距離	$\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ 構成銳角三角形	是	$a=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{yz}{x}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{x^2}\right)$，$b=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{xz}{y}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{y^2}\right)$ $c=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{xy}{z}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}\right)$ (註)
三旁心到對應邊的距離	$x\geq y\geq z>0$	是	$a=\frac{x(y+z)}{\sqrt{xy+yz+zx}},b=\frac{y(x+z)}{\sqrt{xy+yz+zx}},c=\frac{z(x+y)}{\sqrt{xy+yz+zx}}$

第七組報告完畢

感謝聆聽