全國中小學科展

2013年得獎作品

第8組 410831149 楊弘暐

410731137 朱珮綸

410731145 張劭恩

410831135 陳威廷

410731231 童震易

第一名 連續正整數的鈍角三角形劃分

數論+幾何

研究動機

- 考慮集合$S=\{2,3,\ldots,3n+1\}$，試證明：可將其分成n個兩兩不相交的三元子集，使得任一子集中的三個數恰好是某鈍角三角形之三邊長。

  這題目相當有趣，我們將先證明原命題並將其推廣至另外的集合：$\{k,k+1,\ldots,3n+k-1\}$，我們好奇的是什麼樣的k值會使得這樣的集合也能分出鈍角三角形的子集。

第一名 連續正整數的鈍角三角形劃分

數論+幾何

研究目的

- 給定n值求出k的最小值的上下界。
- 給定n值求出k的所有值的上下界。
- 給定n、k時構造出其鈍角三角形的劃分。

第二名　孟氏定理與西瓦定理在多邊形中的推廣

幾何

研究動機

三角形中的『孟氏定理』與『西瓦定理』，有沒有機會將這樣的結果推論到更多邊形的情形，於是我從邊數較少的情形著手出發，四邊形、五邊形到n邊形，逐步完成。完成平面上的推論後，我亦試著將其推廣到『立體空間』，在分區科展後，我又陸續的完成空間中『孟氏共面定理』與『西瓦共點定理』的證明。

第二名 孟氏定理與西瓦定理在多邊形中的推廣

幾何

研究目的

- 孟氏定理在凸/凹四邊形上的推論。
- 西瓦定理在凸/凹四邊形上的推論。
- 孟氏定理在凸五/n邊形上的推論。
- 西瓦定理在凸五/n邊形上的推論。
- 將孟氏定理在凸n邊形上的推論轉變在n條直線上的推論。
- 將西瓦定理的共『點』擴大成『圓』/換成『正多邊形』。
- 空間中的孟氏共面定理。
- 空間中的西瓦共點定理。

第三名 來人阿！把訊息傳出去

組合數學

研究動機

- 我們對訊息傳達過程產生了強烈的好奇心，現在是個講求效率的社會，利用最少成本達到最大效益已經是必要的條件。如何才能利用最少的傳遞次數使所有人均得知訊息。我們反覆畫出訊息傳遞的可能，希望能夠利用此次科展的機會，得出傳遞所能的夠的「最佳」且「最快」方式，並能廣泛運用於生活中。

研究目的

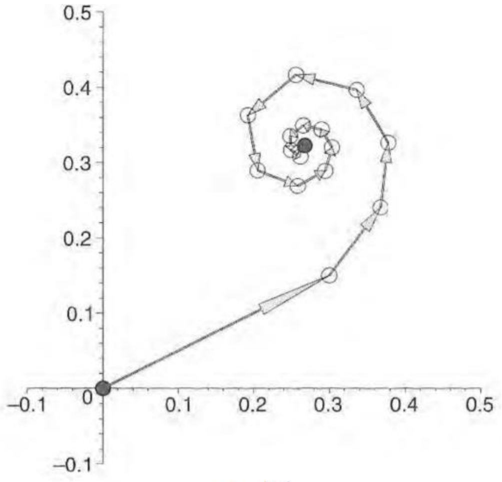
- 分析對談過程，以釐清整合方式的差異。
- 證明最佳的對談模式。
- 找尋最佳對談次數的函數關係。
- 簡化對談流程。

第三名 命中注定我「繞」你

幾何

研究動機

「碎形」─為以某種方式與整體相似部份所組成的圖形。觀察校園裡自然界的呈現，松樹的枝枒是一種自我相似的碎形，羊齒蕨的葉片也是一種碎形。我們對於《動手玩碎形》這本書裡的某個圖（如圖一）感到好奇：



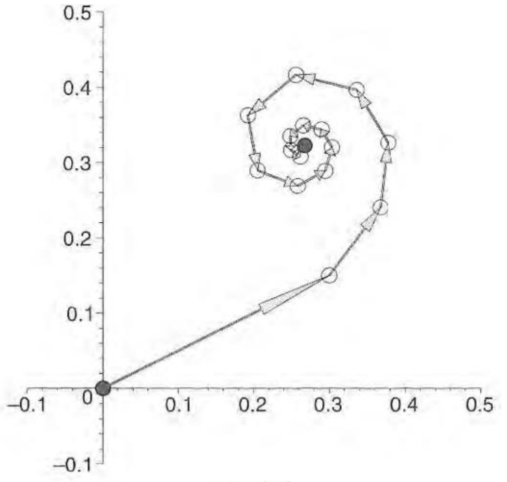
▲ 圖一

第三名 命中注定我「繞」你

幾何

研究動機

- 該圖形重複不斷的繞行後，最後集中到一個點吸子(attractor)。在歷屆科展中對於平面上質點繞行軌跡已經有所探討，而我們生活中的世界是個三維空間，三維空間中點吸子的軌跡又是如何？



▲ 圖一

第三名　命中注定我「繞」你

幾何

研究目的

- 探討當瓢蟲的轉向角為φ $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$，仰角為$\theta$ $(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$時，各轉向角與仰角所對應的收斂點$P$在空間坐標中的關係。
- 探討當瓢蟲分別固定仰角θ $(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$與轉向角$\varphi$ $(0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$時的收斂點$P$的位置。
- 探討各轉向點P_n $(n \in \mathbb{N})$之關聯性。

研究目的

- 從旋轉矩陣探討瓢蟲的繞行模式。
- 從高觀點研究瓢蟲的收斂模式。
- 探討瓢蟲繞行模式的應用。

第三名 平方數列

數論

研究動機

- 老師提及一道有趣的題目，出自於2003年TRML團體賽第七題，題目如下：

  試將1~16這16個數排成一列，使得相鄰兩項之和為完全平方數，且首項大於末項。

  1~16是特例嗎？1~17可以嗎？哪些n可將1~n排成相鄰兩項之和為平方數的數列(以下稱為平方數列)？

第三名 平方數列

數論

研究目的

- 找出哪些n可以將1~n排成「平方數列」，並給出一般化的構造方法。
- 探討平方數列的排法是否唯一。
- 找出哪些n無法將1~n排成平方數列。

第三名 平方數列

數論

作品講解

給定正整數n，是否存在$1\sim n$的重排數列，使得「相鄰兩項之和都是平方數」。對於滿足上述條件的數列，我們稱其為平方數列，我們探討哪些n使得$1\sim n$可排成平方數列。

第三名 平方數列

數論

作品講解

- 對於某類的正整數n，我們已找到構造平方數列的方法：
  - 若正整數a,b,c及$k=0,1,2,4$滿足$a>b$，$a^2+b^2-k=c^2$且$(a^2-b^2,b^2-k)=1$，則$1\sim a^2-k$可排成平方數列。
  - 若正整數a,b,c,α,β滿足$a>c>b$，$b^2+c^2=\alpha^2, a^2+c^2=\beta^2$且$(a^2-b^2,c^2)=1$，則$1\sim a^2-1$可排成平方數列。

第三名 平方數列

數論

作品講解

- 再者，我們可以證明 $n=2\sim14,18\sim22,24$時，$1\sim n$無法排成平方數列；藉由有效率的程式運算，我們得知$n=15\sim17,23$及$n=25\sim144$時，$1\sim n$可排成平方數列。

第三名 平方數列

數論

作品講解

- 若平方數列的首尾兩項相加也是完全平方數時，我們將其定義為平方項鍊。我們造出1~32的平方項鍊，進而可知1~32排成平方數列的方法至少有32種。對於特定的n，我們可將1~n排成平方項鍊；而我們更證明出，$n=32$是可將1~n排成平方項鍊的最小正整數。

佳作 大珠小珠落玉盤—正多邊形的兩個性質

幾何

研究動機

- 「數學傳播季刊」其中有一篇由劉步松教授所寫的「正三角形和正五邊形的兩個性質」特別引起我們的注意，設想如果是其它邊數為奇數的正多邊形，是否也有這兩個性質？而邊數為偶數的正多邊形又如何？於是我們便開始著手研究這個問題。

研究目的

- 探討哪些正多邊形具有「這兩個性質」，並找出「這兩個性質」之間的關係，及其背後所代表的意義。

佳作 君子“號球”

組合數學

研究動機

- 2011年亞太數學奧林匹亞競賽的初選考題的第2題：

  「將10個箱子編號為1,2,3,...,10，另將10個球編號為1,2,3,...,10。今規定編號i的球只能放入編號1,2,3,...,i的箱子，i=1,2,3,...,10。求恰有一個空箱子的放球方法數？」

此題運用高一的「遞迴數列」與「排列組合」便能輕鬆解出，然而題目背後似乎還隱藏著許多可以延伸的部分，於是我們決定探索下去，希望可以從中獲得更多的成果。

佳作 君子“號球”

組合數學

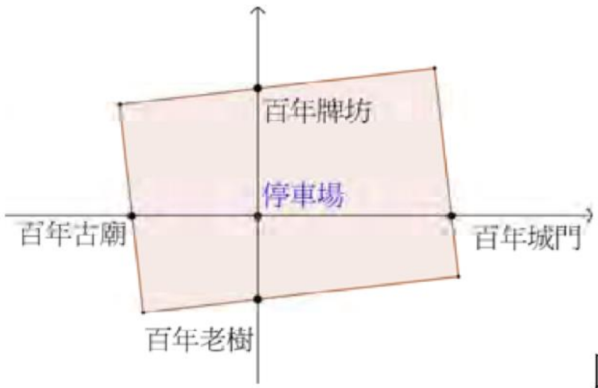
研究目的

- 設m個箱子編號為$1,2,3,\ldots,m$，另有m個球編號為$1,2,3,\ldots,m$。今規定編號i的球只能放入編號$1,2,3,\ldots,i$的箱子，其中$i=1,2,3,\ldots,m$。茲討論各種情況如下：
  - （一）找出m個箱子空第a個箱子的方法數。($a\leq m$)
  - （二）找出m個箱子空任一個箱子的總方法數。
  - （三）找出m個箱子空第a和b個箱子的方法數。($a<b\leq m$)
  - （四）找出m個箱子空任兩個箱子的總方法數。
  - （五）找出m個箱子空任n個箱子的總方法數。($n<m$)
- 給定其他不同類型的限制條件，並討論其方法數。

佳作 循規蹈矩

研究動機

一地區希望在一個垂直的十字路口蓋一個矩形的停車場(如圖①)，十字路口的東、西、南、北各有百年城門、百年古廟、百年老樹、百年牌坊，受限於文化資產保存法的規定，停車場的設置必須避開這些百年古蹟，試問這樣的停車場是否存在？以及它的最大面積為何？



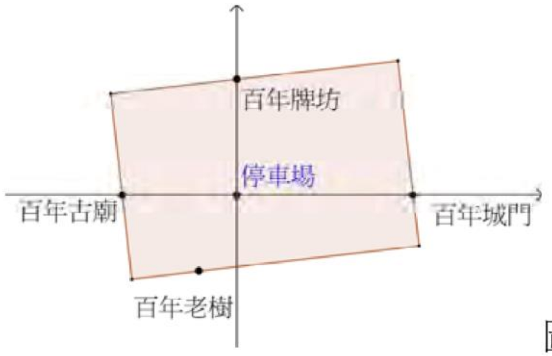
圖①

佳作 循規蹈矩

幾何

研究目的

- 給定平面坐標軸上四點A,B,C,D(x,y軸之正向及負向各一點)，是否存在一個矩形通過這四點，這個矩形的最大面積及最大周長為何。
- 給定平面坐標軸上三點A,B,C及不在軸上一點D(如圖②)，是否存在一個矩形通過這四點，這個矩形的最大面積為何。
- 給定平面相異四點，其中任三點不共線，是否存在一個矩形通過這四點，這個矩形的最大面積為何。



圖②

研究目的

- 任給平面三點，是否存在通過這三點的正三角形。
- 任給平面三點，是否存在通過這三點且與原三角形相似的三角形。
- 給定空間坐標軸上六點(x,y,z軸之正向及負向各一點)，是否存在一個長方體通過這六點，這個長方體的最大體積為何。

謝謝聆聽