第九組

組員:411031116楊子毅

411031117劉秉翰

411031118張銓敏

411031119陳柏諺

411031121戴士宬

411031138曾國恩

第52屆全國中小學科展

高中組數學科

第一名:數形合一

類別:等差級數、遞推式、多角數

研究動機

在啦啦隊比賽中常有隊形變換，如隊形常有三角形和正方形方陣，我對多少人可以同時 排出兩種陣形以上感到好奇，聯想到在數學課本裡面看到的三、四、五角數圖形，我發現了 它迷人的規律，並對此產生了濃厚的興趣。我翻閱了相關書籍與網站，像許志農教授的網站《算術講義》，還有一些翻譯書籍等，但在某些網站中，我發現他們使用的方法繁雜，有些文 章內容有錯，因此我想要藉著這次科展的機會，利用遞推關係、佩爾方程式(含推廣型)和同餘定理，快速找出這種數，對這個問題做深入的研究和探討，還有找出中心多角數的規律和解 法，並證明了一個文獻上關於三重多角數的猜想。

研究目的

一、尋找多角數的通式。

二、是否有 3-4 角數(同時是三角數又是四角數的數)、4-5 角數、3-5 角數？這種數有多少個？ 模式為何?如何求出 3-4 角數、4-5 角數、3-5 角數？如何改進求出 3-4 角數、4-5 角數、3-5 角 數的速度？

三、三角 K 角數、四角 K 角數、五角 K 角數的存在性和個數與模式為何？

四、任意雙重(a-k)多角數的存在性和個數與模式為何？

五、三重多角數的存在性和個數與模式為何？

六、尋找中心多角數的通式。

七、中心三角四角數的存在性和個數與模式為何？

研究目的

八、中心三角五角數的存在性和個數與模式為何？

九、中心四角五角數的存在性和個數與模式為何？

十、中心三角 K 角數的存在性和個數與模式為何？

十一、中心四角 K 角數的存在性和個數與模式為何？

十二、中心五角 K 角數的存在性和個數與模式為何？

十三、雙重中心多角數(即同時是中心 m 角數和中心 n 角數的數)的存在性與模式為何？

十四、同時是多角數和中心多角數的數的存在性與模式為何？

我們希望用個簡潔快速的方法，迅速知道一個數可以是幾種圖形數，又當一個數是多重 圖形數時，它有哪些相同的變化或不規則變化，這些都是我們討論的題目。

第二名:旋轉硬幣的機率

類別:機率、角速度、微分

研究動機

我們在學機率時常開玩笑：「如果硬幣會站起來」。而在印度小說Q&A中，羅摩·穆罕穆德·湯瑪士在小時候曾經被一位算命師算過命，算命師特別給羅摩一枚幸運硬幣，這枚硬幣似乎賦予了羅摩好運氣，往往決定羅摩在重大事件上的行動，而他引起我的注意，如果羅摩的硬幣會站起來呢？

研究目的

一、 探討硬幣出現正面、反面、側面的條件
二、 探討硬幣速度與角初速的關係
三、 探討正面、反面與側面出現機率的值
四、 探討非均質硬幣出現正面、反面與側面出現的機率

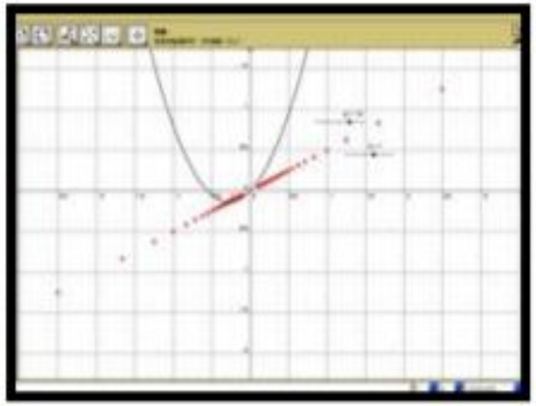
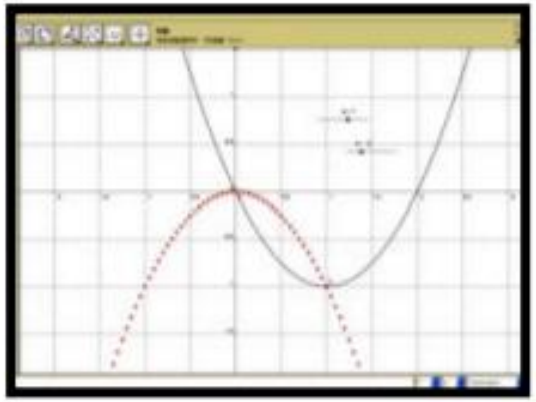
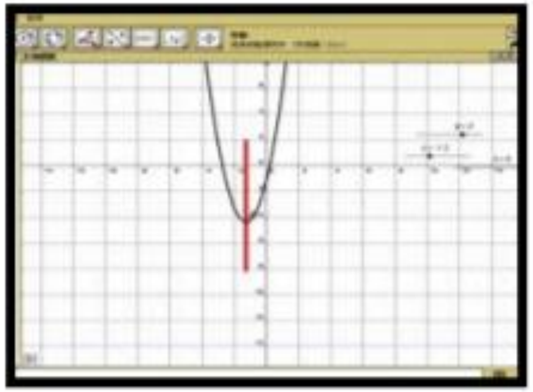
第三名:無奇不有的拋物線-頂點移動軌跡的探討

類別:雙橢拋

研究動機

國中時，老師提到過在二次函數y=ax^2+bx+c 的圖形中，a會影響開口大小，c 會影響函數圖形的高低。這樣的結果往往是使用配方法，得到y=ax^2+bx+c=a$(x-w)^2$+S 的形式，再探討a、c兩變數對圖形的影響。然而，我卻好奇，當二次函數y=ax^2+bx+c 只改變b 值時，函數圖形會怎樣在座標上移動呢？那如果讓a、b、c互相有關係，圖形又會有什麼樣的變化呢？因為頂點是拋物線最具特殊性及代表性的位置，就以拋物線的頂點做為圖形變化的主要觀察對象，展開了下列的研究（如下圖）。

研究動機

		
只有a值變動時的頂點移動軌跡（圖中紅色的部分）	**只有b值變動**時的頂點移動軌跡（圖中紅色的部分）	**只有c值變動**時的頂點移動軌跡（圖中紅色的部分）

研究目的

從上面的三個圖形可以發現，當二次函數y=ax^2 +bx+c 的a,b,c值改變時，圖形的頂點 軌跡會出現直線及拋物線，因此本研究希望能找出當二次函數 的各項係數（a,b,c ）任兩者間具有二次以下的函數關係時，其頂點所產生的各種軌跡，並針對 較特殊的圖形進行討論，進一步將其軌跡的方程式求出，再與所繪出的圖形做分析及比較。因此，我的研究目的如下:

研究目的

一、 觀察二次函數 y=ax^2+bx 的頂點在a、b 互相具有二次以下的函數關係時，所產生的軌 跡圖形，因此我討論以下兩種情形：

（一）當a=Pb^2+Qb+R時

（二）當b=Pa^2+Qa+R時

研究目的

二、 觀察二次函數$y = ax^2$+bx+c的頂點在c、a及c、b 互相具有二次以下的函數關係時，所產生的軌跡圖形，因此我討論以下四種情形:

（一）當c=Pa^2+Qa+R 時

（二）當a=Pc^2+Qc+R 時

（三）當c=Pb^2+Qb+R 時

（四）當b=Pc^2+Qc+R 時

三、 利用代數方法求出上述各種組合的一般式，證明其與頂點軌跡圖形的充要條件後，分 析圖形種類。

第三名:驚奇的數

類別:方程式、多邊形數

研究動機

數學專研時間，老師發下 題的題目，給我們寫十五分鐘。時間一到，立即研討，其中 有一題是有關『驚奇的數』的問題，特別引起我們的注意，於是舉手向老師提問。老師說：「呵呵!其實，我是故意不讓大家一下子就算出來這一題的。」在老師的挑戰性問法下，我們便開 始研究起這”驚奇的數”了。 我們使用參考文獻[1]的矩陣方法，與高二下學期第三章「矩陣」有相當的關聯性，這些雖然並不在高中課程內，但學習這些知識可以處理更廣泛的矩陣問題。

研究目的

1.找出所有驚奇的數，並以一般式及遞迴式表示。

2.探討哪些p邊形數亦同時為四邊形數，並以一般式及遞迴式討論之。

3.探討切比雪夫多項式與我們研究的巧妙關係。

第三名:天羅地網－雷射光線之反射路徑與正n邊形完全圖之關係探討

類別:光反射、三角、圓

研究動機

在數學專題課裡，老師帶領著我們研讀一些文章，其中有一篇文章「*Point Mirror Reflection*」[5]，是關於光線在鏡面間的反射路徑探討，這個物理現象讓我們聯想到一部精彩的電影：Entrapment (中文片名:「將計就計」)，影片中女主角爲了盜取在博物館展覽的寶物，必須穿越錯綜複雜雷射光線，以避免觸動警報系統。這引起了我們對這個主題研究的興趣，我們想到是否能經由鏡面位置的安排與適當的轉動角度，佈置出如天羅地網的雷射光線，形成一個十分完善的防盜警報系統，於是我們就開始進行資料的搜尋與查證。

首先，在國內及國際科展所查尋到的資料分數學與物理兩大類：第一類是數學的科展部分，我們發覺之前的有關鏡射或反射的科展作品，較多是探討多邊形周長最小值的問題，如：第三十八屆中小學科展的「鏡射乾坤」，2004 年的國際科展的「正 *n* 邊形光圈之路徑追蹤」。第二類是物理的科展部分，物理的研究較多是探討光的折射率與我們所探討的數學理論方向不同。

我們也上網搜尋了「*Point Mirror Reflection*」[5]之作者 M. Oskar van Deventer 以了解其對於相關問題是否有更進一步之發展，不過均無所獲。因此在確立了研究主題沒有人做進一步的探討後，我們就開始著手進行研究，以下我們即將佈下一個天羅地網，請拭目以待。

研究目的

一、探討在只將第一個鏡面(引入光線之入射鏡面)順時針轉動 $\frac{90^\circ}{n}$ ，而其餘鏡面不轉動時，光線在正 n 邊形各頂點的鏡面間之反射情形並計算其反射數。

二、進一步討論除第一個鏡面(引入光線之入射鏡面)順時針轉動 $\frac{90^\circ}{n}$ 外，其餘鏡面可以依順時針或逆時針旋轉一個角度 $\theta=\frac{90^\circ}{n}$ 亦或是不轉動，光線在正 n 邊形(n 為偶數)各頂點的鏡面間反射的情形。

三、找出鏡面調整之規則，藉由調整多個鏡面以增加光線在正 n 邊形各頂點的鏡面間的反射次數並計算其調整後之反射次數。

四、運用鏡面調整之規則擬訂策略找尋反射數的最大值。

五、探討正 n 邊形之邊數 n 的質因數與缺少的反射線數之關聯性。

佳作:三角梅花五面開

類別:高斯、多項式、五邊形

研究動機

一次專題課中，我們研讀了《算術講義》而認識高斯五邊形定理，發 現圖形面積之間的關係，進而引發我們好奇，在一個圖形中，已知部分面 積，是否可以找出它與整個圖形的關係？而講義尾聲留下的問題，啟發我 們探討是否可以五邊形內部不同區域的面積而求得整體五邊形的面積？ 我們更好奇推廣到其他的凸多邊形時，內部是否亦有關係式？此外， 更致力於回歸到較純粹的手法，書寫證明時，以讀者容易了解為原則，期 望對於學習數學上能夠有所助益。

研究目的

1. 使用簡潔扼要的方式證明高斯五邊形定理
2. 改變已知條件：從五邊形內部不同的三角形求五邊形面積
3. 探討六邊形以上之圖形是否也有關係式

佳作:Avoid123

類別:矩陣、遞迴關係

研究動機

我們這個題目的來源是某一天老師在專題課時突然提出來的突擊問題，一開始我們只是把 它當成專題來研究，然而隨著不斷的討論與失敗讓我們對這個題目越來越有興趣，並決定正式 把這個當成我們的科展題目。後來又去上網查了一些資料(見附錄)，卻查到了很多外國文獻然而 外國文獻和研究中都並未對這個問題有一個很好的處理方法(例如只有 n<=3 才能使用的公式)， 抑或者是只有研究特定情況下的 avoid。例如：(avoid123 且 avoid132)或(只有一個 123 且 avoid312) 等等同時有兩個條件的例子，感覺到此問題富有挑戰性，並期待可以找到一個更加適當的方法 去全面地處理這個問題。

佳作:萬花筒-正三角鏡

類別:三角、反射、同餘

研究動機

有天老師上數學課時，提到直線的鏡射，我們靈機一動，想到了正三角鏡的 萬花筒。在三角鏡中以一頂點為光源向對邊發射，使其在內部不斷地反射（如圖 1）。以邊為對稱軸，將三角鏡無限翻轉（如圖 2、圖 3）。可從這些無數 的入射線、反射線都呈一直線地無限延伸。

研究動機

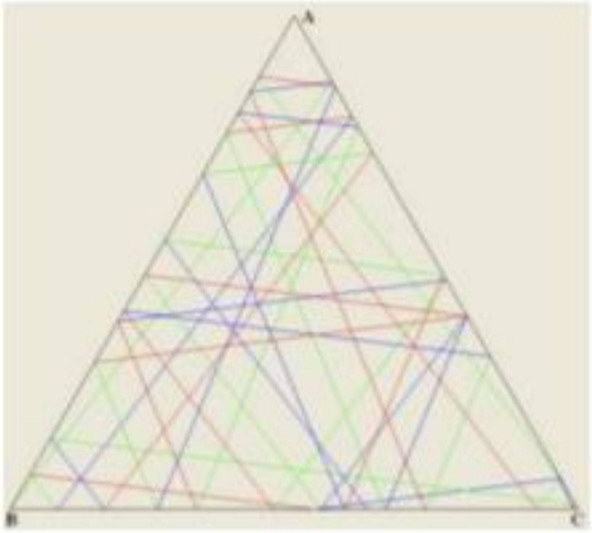


圖1:三角鏡內的反射光

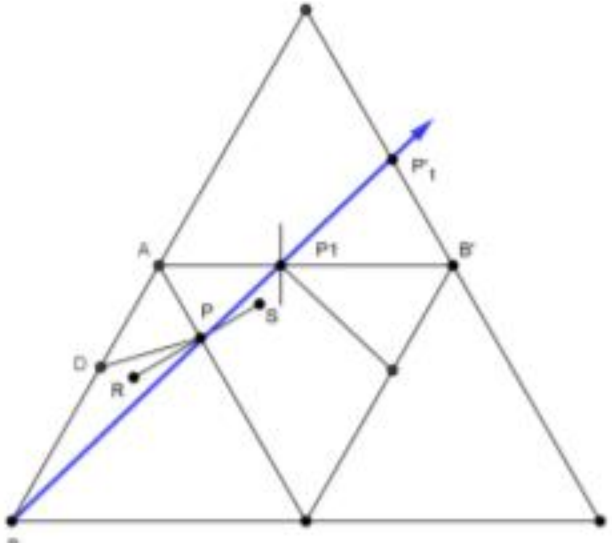


圖2:入射線與反射線會共線

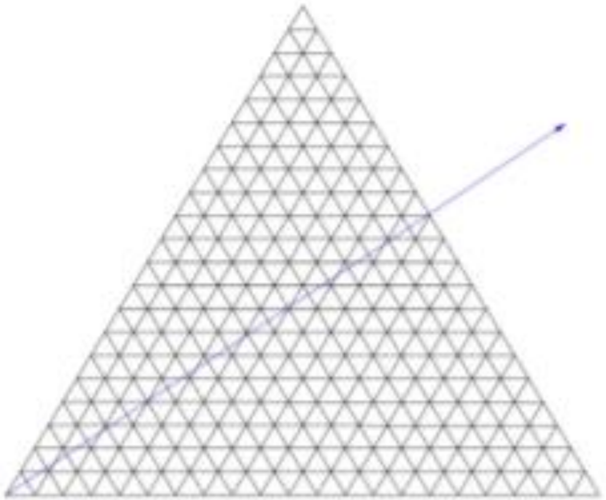


圖3:展開圖

研究動機

我們將研究光點是否會射回原點（光源），若會，則探討入射、反射的總次 數是多少次?若不會反射回原點（光源），則探討光源打在邊上的這無數點的分 布，在這邊上是否具有稠密性?

研究目的

一、由原點 B 射到邊 $\overline{AC}$ 上一點 P，若 $\overline{CP}$ 長爲有理數（如圖 4），令 $\overline{CP}=\frac{b}{a},(a,b)=1,a,b\in N,0<\frac{1}{m}<1$，則

$$\begin{cases}\text{若 } a+b\equiv 0 \pmod 3 \text{，則射回原點 } B \text{ 所需總次數爲何？}\\ \text{若 } a+b\equiv 1 \pmod 3 \text{，則射回原點 } B \text{ 所需總次數爲何？}\\ \text{若 } a+b\equiv 2 \pmod 3 \text{，則射回原點 } B \text{ 所需總次數爲何}\end{cases}$$

光線

二、由原點 B 射到對邊 $\overline{AC}$ 上一點 P，若 $\overline{CP}$ 長爲無理數，則它經過無窮多次的入射、反射，都無法回到三頂點，欲探討射在每一邊上的這些無窮多點，在邊上的分布是否具有**稠密性**？（如圖 5）。

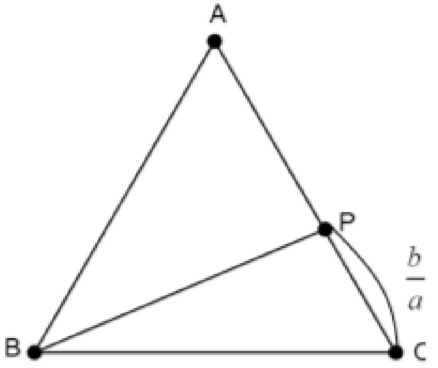


圖 4、由原點 B 射出

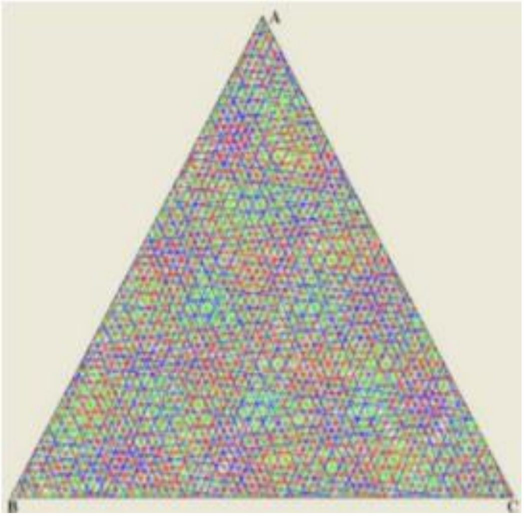


圖 5、以 $\overline{CP}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 爲例，反射多次皆無法回到原點

佳作:圓盤在彈性碰撞下覆蓋面積之探討

類別:圓、斜率、彈性碰撞

研究動機

首次得知時下熱門的家用清潔幫手---機器人掃地機(如圖 1.)便對這科技產品心生好奇， 仔細觀察其運作方式後發現：掃地機經過的區域大抵皆能達清潔之效，但遇障礙物時用以引 導方向的前端需要轉向才能繼續清掃，因而不盡然能打掃到每一塊區域，也很容易重複清掃 到相同的地方，因此清掃一次的經濟成本較一般吸塵器為高。 之後有次看 DVD 時，其待機畫面為一橢圓形圖示(如圖 2.)在螢幕上不停地進行彈性碰撞 運動，其路徑看似也能佈滿整個螢幕。這讓我們聯想到：既然掃地機行經區域大抵皆能達清 潔之效，那麼是否可藉由彈性碰撞運動的方式來清掃房間，以節省遇到障礙物時必須轉向再 前進的時間？

研究動機

圖 1.

圖 2.

於是，我們想要暸解若掃地機以彈性碰撞運動方式行進時，不同的出發角度對於清掃面 積的影響；其次，我們也留意到房間內的插座位置會影響掃地機的起始狀況，因而導致路徑 不同，所以我們想進一步暸解倘若改變起始位置對於清掃面積又有何影響？

研究目的

一、探討圓盤在正方形區域內以不同角度出發進行彈性碰撞運動的面積覆蓋情形。

二、探討圓盤在長方形區域內以不同角度出發進行彈性碰撞運動的面積覆蓋情形。

三、探討在相同面積的矩形區域內，圓盤以同一角度出發進行彈性碰撞運動的面積覆蓋情形。

四、探討在相同區域內，改變圓盤起始位置，以同一角度出發進行彈性碰撞運動對面積覆蓋的影響。