2012

MATHEMATICS

臺灣國際科學展覽會

第一組
陳威宏 陳宣睿
邱仲華 游智宇
張天傑 許仲勳

目錄

CONTENTES

得獎作品介紹

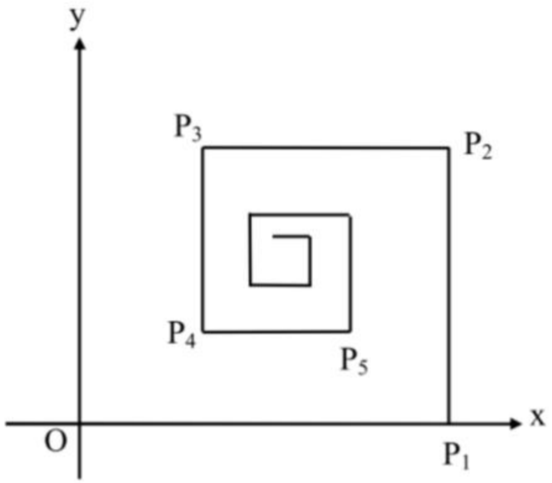
Introduction of winning works

峰迴路轉-等比繞行的秘密

類別:等比級數 圓錐曲線

研究動機:

坐標平面上一機器瓢蟲由原點出發，先向東移動 1 單位，停在 P_1 點，再往北移動 $\frac{4}{5}$ 單位，停在 P_2 點，接著又向西移動 $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ 單位，停在 P_3 點，再向南移動 $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ 單位，停在 P_4 點，再依序向東、向北、向西、向南、...繼續不斷（如下圖），每次移動距離都是前一次的 $\frac{4}{5}$，則這隻機器瓢蟲最後幾乎停止於 P 點，則 P 點的坐標為何？



峰迴路轉-等比繞行的秘密

研究目的:

一、探討當機器瓢蟲的轉向角為 $\frac{360^\circ}{N}\left(N\in\mathbb{N},N\geq 3\right)$（正 N 邊形的一個外角）時，各轉向角所對應的收斂點於坐標平面上的關係。

二、探討當機器瓢蟲的轉向角 θ 為任意角時，各轉向角 θ 所對應的收斂點間的關係。

三、探討當機器瓢蟲的轉向角 θ 為任意角時，收斂點與圓錐曲線的關聯性。

四、探討各轉向點 $P_n\left(n\in\mathbb{N}\right)$ 之關聯性。

五、探討當機器瓢蟲的轉向次數為 k 次 $\left(k\in\mathbb{N},k\geq 3\right)$ 且轉向角 θ 為任意角時，瓢蟲之終點 P_{k+1} 於坐標平面上所成之軌跡。

六、探討轉向次數 $k=2$ 所成之軌跡。

七、當機器瓢蟲行進公比 $r\to 1^-,r=1,r\to 1^+$，轉向角 θ 為任意角，轉向次數為 k 時，展示瓢蟲之終點 P_{k+1} 於坐標平面上所成之圖形。

Seeing Dots

二等獎

類別:質因數 尤拉函數

研究動機:

在某次數學讀書會上,數學老師給了各種不同數學問題供我們思考。其中, 我們對一個數學問題特別感到興趣,其題目內容敘述如下:
將一個樂隊放在座標平面第一象限正整數格子點上,攝影師在原點、x 軸、y 軸正整數點上拍攝,則最少需要幾個拍攝點才能將所有人都拍攝完畢?
將攝影師限制在原點與 x 軸(或 y 軸),造成所需的拍攝點較多, 因此,我們想考慮攝影師的位置可以同時包含更 x 軸與 y 軸上的點,深入探討下 列問題:
我們稱樂隊成員所在的點為目標點,稱攝影師所在的點為拍攝點。以符號 N 表示正整數所成的集合。

Seeing Dots

研究目的:

（一）限制 x 軸上拍攝點落在集合 $\{(i,0) \mid 0 \le i \le m+1\}$ 範圍內，拍攝點集 S 包含原點，並允許 y 軸上的正整數點。

（二）若目標點集增加第二、三、四象限的帶狀點集，則最小拍攝點數與(一)之間關係為何？

（三）若將拍攝點集 S 限制在直線 $y=x$ 上的正整數格子點(k 為正整數)，並允許 y 軸上的正整數點。

Ferrers diagram

二等獎

類別:代數

研究動機:
在一次餐會時，教授介紹

研究目的:

(一) 最小特徵圖的上界：至多需要多少資訊量

(二) 廣義最小特徵圖的下界：至少需要多少資訊量(在廣義情況下)

(三) 狹義最小特徵圖的下界：至少需要多少資訊量(在狹義情況下)

阿里巴巴轉盤問題

三等獎

類別:質因數分解

研究動機:

以2009年環球城市數學競賽第七題為推廣

阿里巴巴的寶箱有一圓形轉盤，它是開啟寶箱的機關。轉盤的圓周上有n個完全相同的桶子，任何相鄰桶子的距離都相等。在每一個桶子內各放置正面或反面的金幣。阿里巴巴每次操作都可以選擇任何位置、總個數為k的桶子，並觀察這k個桶子內的金幣。在他觀察完以後，他可以選擇對這k個桶子內的金幣進行上下翻轉，每一個金幣都可以選擇翻或不翻。當每次操作結束，如果桶內有連續m個金幣全部都是正面或反面，則寶箱就會打開。否則圓盤就會立即開始轉動，它每一次轉動的角度都是隨機的，並且在一次轉動完以後，沒有人能分辨原本的桶子轉動之後會停在哪裡且是否被翻轉過。無論這些金幣如何擺置，如果阿里巴巴能有策略打開門，那麼稱此時所選取的k為「好k」。對於固定的n和m，定義$k(n,m)$為「好k」這一個集合中最小的數。求$k(n,m)$的值為何？

阿里巴巴轉盤問題

研究目的:

一、找出 $m=n$ 時，$k(n,m)$ 的值

二、找出 $m=n-1$ 時，$k(n,m)$ 的值或上下界

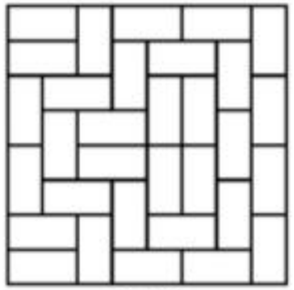
缺幾格大不同-
從方格排列結構到路徑之探討

三等獎

類別:幾何 排列組合

研究動機:

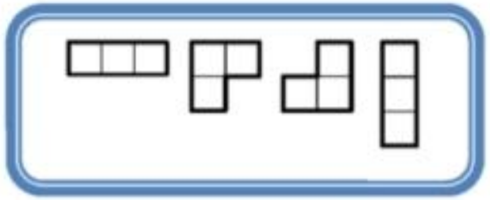
在2009年十月份的科學月刊中，我們讀到一篇關於骨牌排列問題(DominoTiling)的介紹文章[3]，文中提到一道數學問題：利用1×2的骨牌拼貼填滿$2\times n$的矩形、$3\times n$的矩形(其中n為自然數)，其方法數為何？並將問題擴展到利用1×2的骨牌拼滿$2m\times 2n$的矩形之方法數(m,n均為正整數)，如圖(1)。而此問題已由Kasteleyn[10]完成，並得知其方法數為$4^{mn}\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}\left(\cos^2\frac{j\pi}{2m+1}+\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)$。



圖(1)

已知由Hook Length公式[12]得以計算Standard Young Tableau在特定形狀下的方法數，但不易計算一般情形下給定方格數量的方法數。而在參考資料[1]中，初步得出特定條件下的骨牌排列結構以及各種排列方式與路徑的對應，並節錄與本研究相關的部分內容於報告中。

此外，Fomin和Lulov[9]探討擴展至特定形狀的r-Ribbons排列圖形之方法數。而Callahan等[5]計算將3-Ribbons(如圖(2))填滿$2\times n$的矩形、$3\times n$的矩形的方法數。於是，我們希望進一步嘗試採用「多格相連」的r-Ribbons填入Young Diagram中進行排列。觀察排列的結構與規律，並與路徑結合，探究關於該結構在缺格Young Diagram中的關係是否也有特別的性質？



圖(2)

缺幾格大不同-
從方格排列結構到路徑之探討

研究目的:

一、探討各種缺格的骨牌排列結構與路徑間的連結。

二、探討r-Ribbons Tableaux與其「缺一格」結構之間的關聯性。

三、探討特定高度下r-Ribbons Tableaux之排列結構性質與數量關係。

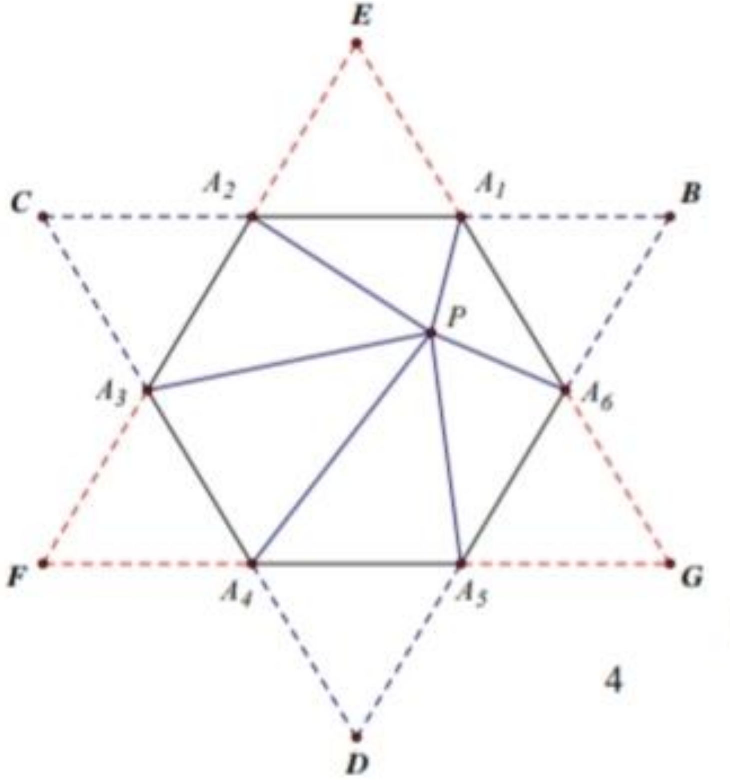
由正 2n 邊形與一點
所衍生的三角形面積比值問題

三等獎

類別:幾何

研究動機:

在解能力競賽試題時，我們發現了一個有趣的題目:「P 是正六邊形 $A_1A_2 \dots A_{2n}$ 內任意一點，試證明 $\Delta A_1A_2P+\Delta A_3A_4P+\Delta A_5A_6P=\Delta A_2A_3P+\Delta A_4A_5P+\Delta A_6A_1P$。」我們很快的知道，對正 $2n$ 邊形這個性質仍然是對的。但是，如果 P 點在正 $2n$ 邊形外部時，是否有相同的結果？藉由 GSP 的幫助，我們知道一般的情形是不會相等的，而哪些點可以使等式成立呢？又我們在第 50 屆全國科展作品(點到為止—由西姆松定理所衍生的極值與定值探討)中得知：「半徑為 R 的圓上一動點 P，到其內接正 $2n$ 邊形 $A_1A_2 \dots A_{2n-1}A_{2n}$ 各邊距離平方和為一定值」，便好奇，若將 $\Delta A_1A_2P+\Delta A_3A_4P+\dots+\Delta A_{2n-1}A_{2n}P$ 改為 $(\Delta A_2A_3P)^m+(\Delta A_4A_5P)^{m+\cdots+}(\Delta A_{2n}A_1P)^m$，那麼等式是否還會成立呢？我們覺得這些問題十分有趣，希望找到隱藏在這個題目背後的秘密。



圖(1)

4

由正 2n 邊形與一點所衍生的三角形面積比值問題

研究目的:

一、討論正 $2n$ 邊形時，是否有相同的結果？

二、P 點在正 $2n$ 邊形外部時，哪些點可以使等式成立？

三、研究 P 點在正 $2n$ 邊形 $A_1A_2 \ldots A_{2n-1}A_{2n}$ 外部時，面積比

$$\lambda = \frac{\triangle A_2A_3P + \triangle A_4A_5P + \ldots + \triangle A_{2n}A_1P}{\triangle A_1A_2P + \triangle A_3A_4P + \ldots + \triangle A_{2n-1}A_{2n}P}$$ 的性質。

四、P 點在正 2n 邊形 $A_1A_2 \ldots A_{2n-1}A_{2n}$ 內部時，$\Delta A_1A_2P + \Delta A_3A_4P + \ldots + \Delta A_{2n-1}A_{2n}P =$

$(\Delta A_2A_3P)^m + (\Delta A_4A_5P)^{m+ \cdots +}(\Delta A_{2n}A_1P)^m$ 是否會成立？

五、P 點在正 $2n$ 邊形 $A_1A_2 \ldots A_{2n-1}A_{2n}$ 外部時，

$(\Delta A_1A_2P)^m + (\Delta A_3A_4P)^m + \ldots + (\Delta A_{2n-1}A_{2n}P)^m =$

$(\Delta A_2A_3P)^m + (\Delta A_4A_5P)^{m+ \cdots +}(\Delta A_{2n}A_1P)^m$ 是否會成立？

A Backpropagation Neural Network Model on Precipitation Forecasting in the Philippines

類別:統計

給我三個點 來畫平行多邊形

四等獎

類別:幾何 對稱 遞迴 線性組合

研究動機:

校內數學學科能力競試遴選出了一道題目：「凸五邊形 $ABCDE$，已知 $a\triangle ABC = a\triangle BCD = a\triangle CDE = a\triangle DEA = a\triangle EAB = 400$，求凸五邊形 $ABCDE$ 的面積？」一看到「兩三角形面積相等」自然要聯想到同底等高，必須作出：每一邊相鄰的兩頂點所連對角線與該邊皆能夠平行的五邊形方能符合題意，雖然解得出面積值，但是卻難以作出圖形，我們對此圖形性質更加感興趣，於是我們便開始著手研究神秘的平行多邊形。第 24 屆全國中小學科學展覽作品「平行五邊形」，有別於其作品，我們應用完全不同的數學方法，更廣泛地處理了平行多邊形的相關性質。

給我三個點 來畫平行多邊形

研究目的:

任意給定三個不共直線的相異點，以此三點為相鄰三頂點並以平行的方式依序完成其他頂點，如何得到此種平行多邊形？以下是研究目的：

一、邊與其對應對角線長度比例為定值的平行多邊形。

二、邊與其對應對角線長度比例不為定值的平行多邊形。

三、橢圓內接面積最大的 m 邊形必為邊與其對應對角線長度比值固定的平行 m 邊形。

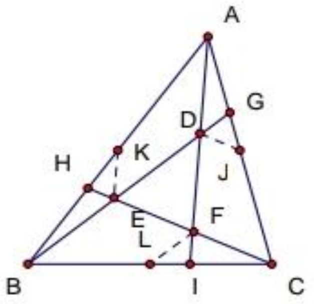
三角形同向切割線之性質推廣

四等獎

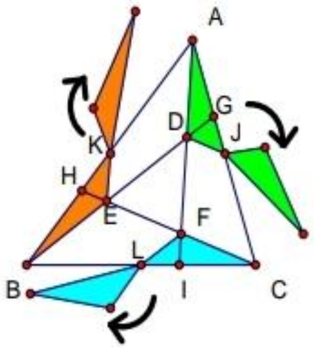
類別:幾何

研究動機:

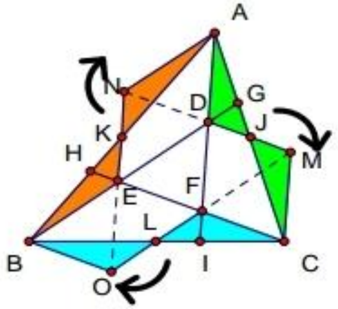
著名的數學雜誌期刊 ***Proof Without Words Ⅱ*** 中，***William Johnston*** 和 ***Joe Kennedy*** 在 ***"Heptasection of a triangle"*** 本篇文章中，首先提出了關於三角形的等分切割與重組的問題，在文章中作者以重組拼圖的方式，說明了任意三角形的面積為第 <3,1> 組同向切割線所得到的中央三角形面積的 7 倍，其步驟順序分別如下圖(a)、(b)、(c)、(d)所示；然而文章中並沒有充分說明解決之方法及原理，這引發我們了的好奇；因此本研究將以不同角度方法，重新探討詮釋此問題，並將性質加以推廣。



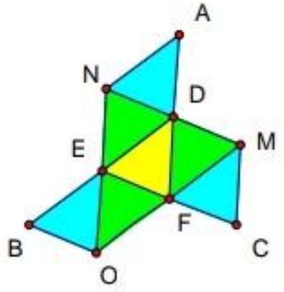
(a)



(b)



(c)



(d)

三角形同向切割線之性質推廣

研究目的:

(1)探討任意三角形其第$<n,m>$組同向切割線之性質。

(2)探討任意梯形其第$<n,1>$組與第$<n,m>$組同向切割線之性質。

(3)探討平行四邊形其第$<n,m>$組同向切割線之性質。

(4)探討任意正r邊形其第$<n,m>$組同向切割線之性質，並對其極限值做探討。

電梯問題

四等獎

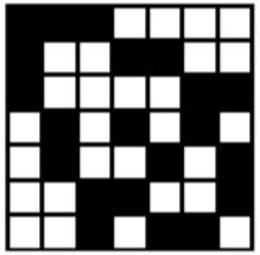
類別:排列組合

研究動機:

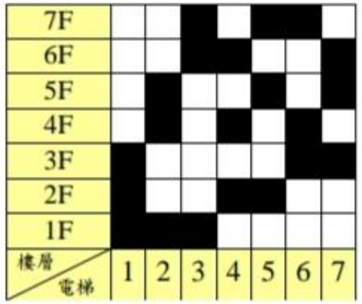
2011 青少年數學國際城市邀請賽隊際賽第 9 題：

9. 請從 7×7 方格表的 49 個小方格中選擇 21 個塗上顏色，使得任意四個已塗色的小方格無法構成某個長方形（其中長方形的所有邊都在格線上）的四個角落。

我們做出的答案為：



在比賽結束後，我們赫然發現這題的答案與我們之前所聽過的「電梯問題」有著異曲同工之妙：「當共有 7 部電梯，且每部電梯可停靠 3 層樓時，該建築物可擁有的最多樓層數：$f(7, 3) = 7$。」



因此，我們決定試著研究此類題目的一般情況。

電梯問題

研究目的:

一、分析既有的結果，找出未完成的部分

二、針對個別的 $f(m,n)$，具體求出其值

三、引入函數 $g(n,k)=m$，求出更多的 $f(m,n)$ 值

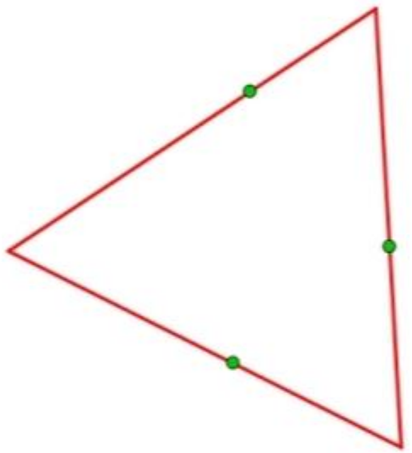
過平面上 n 定點作正 n 邊形問題與其對偶命題

四等獎

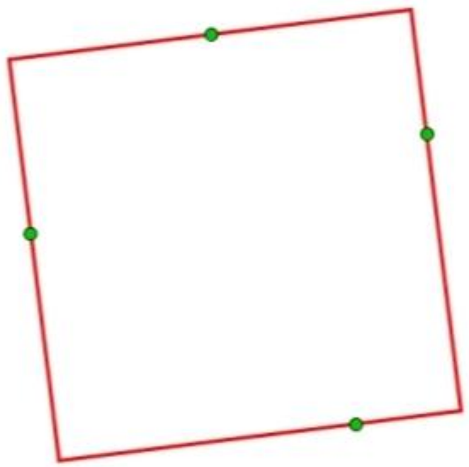
類別:幾何

研究動機:

在學習複數的單元中，我們發現圓上三等分點，可形成正三角形；五等分點，可形成正五邊形。那麼，若給定的三個點是平面上不共線相異三點，可否通過一個正三角形呢？（如圖一）不共線相異四點，可否通過一個正方形呢？（如圖二）這個想法引發了我們一連串的探索。



圖一



圖二

研究目的:

（一）探討平面上不共線的三點，可否存在正三角形，使得各線上恰含有前述三點中的一點。

（二）探討平面上任三點不共線的四點，可否存在正方形，使得各線上恰含有前述四點中的一點。

（三）探討平面上任三點不共線的五點，可否存在正五邊形，使得各線上恰含有前述五點中的一點。

（四）探討平面上任三點不共線的n點，可否存在正n邊形，使得各線上恰含有前述n點中的一點。

（五）探討平面上任兩線不平行、不共點的三線，可否存在正三角形，使得各頂點恰在前述三線中的一線。

（六）探討平面上任兩線不平行、任三線不共點的四線，可否存在正方形，使得各頂點恰在前述四線中的一線。

（七）探討平面上任兩線不平行、任三線不共點的五線，可否存在正五邊形，使得各頂點恰在前述五線中的一線。

（八）探討平面上任兩線不平行、任三線不共點的n線，可否存在正n邊形，使得各頂點恰在前述n線中的一線。

（九）探討平面上n條平行線，可否存在正n邊形，使得各頂點恰在前述n線中的一線。

（十）探討平面上n個同心圓，可否存在正n邊形，使得各頂點恰在前述n圓中的一圓。

腦筋打結的滋味—
猜帽上數邏輯推理遊戲

四等獎

類別:代數

研究動機:

筆者第一次看到這個題目是第五屆青少年數學國際城市邀請賽的填充第五題，以下是它的原命題：

已知 x 與 y 皆為大於 1 的正整數。現將此兩數之積寫在 A 頭頂的帽子上，將此兩數之和寫在 B 頭頂的帽子上。他們兩人都看不見自己帽子上的數，但都可以看到對方帽子上的數。他們分別輪流說出以下的對話：

B：我不知道我帽子上的數。

A：我也不知道我帽子上的數。

B：我依然不知道我帽子上的數。

A：我現在知道我帽子上的數了。

A、B 兩人都是飽學的邏輯學家，他們不會推理錯誤，而且說的都是真話。請問 A、B 帽子上所寫的數字分別是多少？

當時筆者和幾位同學一起解決這個問題，後來又找到一些資料，裡面有這個命題的變形，包括：不同人先說話、改變 x、y 取值範圍、推論對方反應。

研究目的:

在本研究中，我們希望可以分析不同的條件對於推理過程的影響，以及解與解之間的關聯性。

而除了原本的命題之外，我們也可以改變邏輯學家回答問題的方式，不使兩人輪流說話，而是讓他們同時說話，這樣一來遊戲就會變得比較公平。

命題

已知 x 與 y 皆為大於 1 的正整數。現將此兩數之積寫在 A 頭頂的帽子上，將此兩數之和寫在 B 頭頂的帽子上。他們兩人都看不見自己帽子的上的數，但都可以看到對方帽子上的數。

每隔一段時間鈴響，此時他們都要說出是否知道自己的帽上數：

第一次鈴響：兩人都說：我不知道我帽上的數。

第二次鈴響：兩人都說：我還是不知道我帽子上的數。

第三次鈴響：A：我仍然不知道我帽子上的數。

B：我現在知道我帽上的數了。

因此在本研究中，我們嘗試著找出以下幾個特性：

(一)、說話次數對解的影響。

(二)、不同變形與解之間的關聯。

(三)、不同的對話方式對解的影響。

(四)、各組解本身的性質及之間關聯性。

多邊形的內接母子相似作圖與相關問題的研究

四等獎

類別:幾何

研究動機:

在國中課程裏，將任意三角形三邊中點連接，可得此三角形與原三角形相似，我們很好奇，是否有其他方法可以做出內接母子相似三角形？經過相關文獻資料的查詢，在 37 屆高中數學組國展作品「如何在三角形內找一個含給定角且具有最小面積的內接三角形」所使用的「垂足法」，與 46 屆國中數學組國展作品「內接相似三角形的尺規作圖」所使用的「旋轉法」。我們嘗試以「垂足法」、「旋轉法」作四邊形的內接母子相似。發現到「垂足法」只能做三角形；「旋轉法」只能作出四個角對應相等，但不能保證是內接母子相似，實際上，以旋轉法幾乎作不出內接母子相似多邊形(四邊以上)。因此，我們試著尋找一個方法，能夠做出三角形的內接母子相似，並推廣到四邊形以上的內接母子相似圖形。

多邊形的內接母子相似作圖與相關問題的研究

研究目的:

1. 探討一般化方法，以尺規作出內接母子相似多邊形。
2. 探討多邊形存在內接母子相似的條件。
3. 建構出具有內接母子相似圖形的多邊形。

The use of Square shaped wheels in ship harbouring using an inverted catenary surface

四等獎

類別:幾何

A square wheel can roll smoothly by,

- keeping the axle of the vehicle moving in a straight line and
- coinciding each side of the square wheel with each bump of the inverted catenary shaped road,

The square wheel with axle at same level running on inverted catenary surface

Now we took the side of the square wheel as 22 cm so we get the length of each bump of road as 22 cm and then we applied the formula of

Project Motion in Sports

四等獎

類別:拋物線

作品講解

電梯問題

電梯問題

名詞定義:

一、$f(m,n)=k$：當共有 m 部電梯，且每部電梯可停靠 n 層樓時，該建築物可擁有的最多樓層數。

二、$g(n,k)=m$：當每部電梯可停靠 n 層樓，且該建築物共有 k 層樓時，所需的最少電梯數量。

三、全能建築：在一棟建築中，若任兩層樓都至少有一部電梯連接，則稱此建築為全能建築。

四、完美建築：在一棟建築中，若任兩層樓都恰有一部電梯連接，則稱此建築為完美建築。

五、Case k：在一棟全能建築中，若每層樓皆被 k+1 部電梯停靠，且至少有一層樓不被 k+2 部電梯停靠，則該情況屬於 Case k。

電梯問題

研究過程:

在開始研究之前，我們先介紹一些基本的引理，並不再加以證明：

(相關證明請見參考資料中的「電梯問題」)

引理 1：$\boldsymbol{f(m+1, n) \geqq f(m, n)}$

引理 2：$\boldsymbol{f(m, n+1) \geqq f(m, n)+1}$

引理 3：$\boldsymbol{f(m, kn) \geqq kf(m, n)}$

另外，根據在「The Commuter Bus Problem」中提到的方法，我們將所有的電梯問題歸類為 k 種不同的情況(Case k，詳見該份資料中相關定義的部分)。

電梯問題

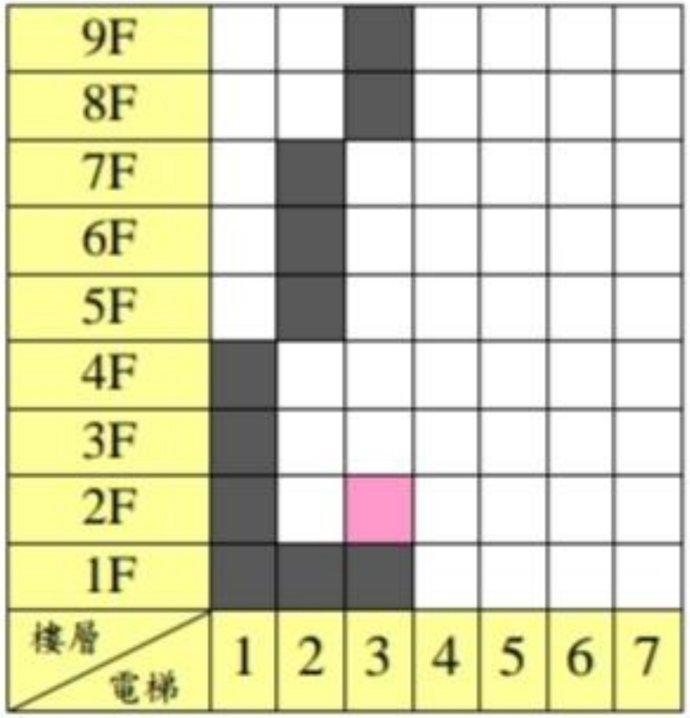
m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	1	3	4	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24
4	1	3	5	6	8	10	11	13	15	16	18	20	21	23	25	26
5	1	3	5	7	9	10	12	14	16	18	19	21	23	25	27	28
6	1	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
7	1	4	7	8	11	14		18	21		25	28		32	35	
8	1	4	7	9	11	14										
9	1	4	7	10	12		17	20								
10	1	5	7	10	13	16	18		23	26		32				
11	1	5	8	11	13	16	19	22		28		33				
12	1	5	9	12	14	18		24	27			36			45	48
13	1	5	9	13				26				39				52

電梯問題

研究過程:

f (7,4) = 8 的情形

1.先考慮若 f (7,4)=9，此狀況屬於 Case II，所以必有其中一樓層只有三 部電梯通過。
假設 1F 只有三部電梯通過，則另外 8 層樓各被這三部電梯至少停靠 1 次。可設這三部電梯停靠樓層為(1,2,3,4)、(1,5,6,7)、(1,2,8,9)

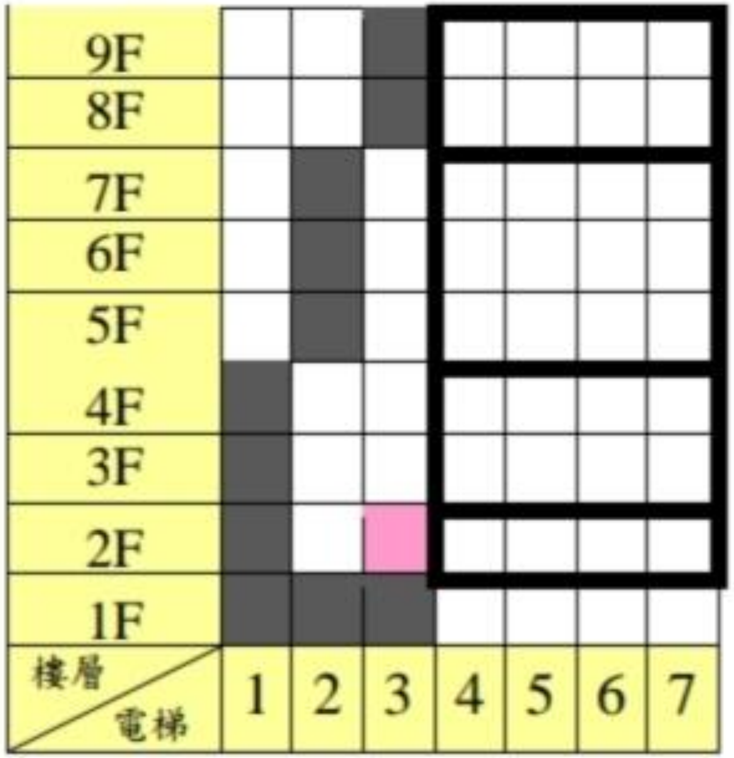


電梯問題

研究過程:

2.以樓層的配對方式而言，共有 9 2 C = 36 條路徑，而 7 部電梯可製造 7 4 C2 = 42 條路徑，其中的差距最多可浪費 6 條路徑；而扣除一開始第三部 電梯所浪費的 1F~2F，只剩 5 條路徑可浪費。

3.將除了 1F、2F 的樓層分成(3,4)、(5,6,7)、(8,9)三類，剩下的四部電梯 必須設在(3,4)、(5,6,7)、(8,9)之間，以及 2 與(5,6,7)之間



電梯問題

研究過程:

但發現，無論剩下的四部電梯怎麼設，都至少重複一條； 除此之外，由於 2 樓還需與 5、6、7 樓連接，而若有一部電梯停留在 (2,5,6,7)，則此部電梯浪費了(5,6) (5,7) (6,7)三條路徑。 但若沒有(2,5,6,7)，則表示剩下的四部電梯有至少兩部與 2 樓連接，可 發現這兩部電梯都至少會浪費兩條路徑。 這些情況共浪費 2+2+1+1=6 條，與第二點敘述不符合，所以 f (7,4)=9 不可行。

4.由引理 2 可以推知 f (7,4) > f (7,3) + 1 = 8。

電梯問題

研究過程:

令 $g(n,k)=m$ 是一個完美建築，若 $g(n,k)=m$ 與 $g(n,k+1)=m_1$，

則 $m_1 = m + \left\lceil \dfrac{k}{n-1} \right\rceil$

電梯問題

研究過程:

$$g(3,k)=\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil \times k}{3} \right\rceil$$