數形合一

第二組

工作分配:

報告	411031128 蔣一豪
簡報製作	411031106 張心玫 411031136 陳筠婷
010021NICE數-正方形與正立方體的切割 010046整係數多項式裡有乾坤-平衡多項式	411031106 張心玫
010009雙橢圓交點軌跡之研究 010035特殊形pell方程式之矩陣解研究	411031108 魏碩廷
010031數形合一 010002匀稱分割	411031109 羅允澤
010018棋盤中矩形周長和最小的分割策略 010034有趣的切披薩問題	411031136 陳筠婷
010022在地表上畫畫-球面上的尺規作圖 010047以直向、橫向、斜向磁磚鋪滿mxn矩形的研究	411031142 倪詩晶

010031：

數形合一

得獎名次：一等獎、青少年科學獎

類別分析：幾何

By:411031109 羅允澤

研究動機 ：

在啦啦隊比賽中常有隊形變換，如隊形常有三角形和正方形方陣，作者對多少人可以同時排出兩種陣形以上感到好奇，聯想到在數學課本裡面看到的三、四、五角數圖形，發現了它迷人的規律，並對此產生了濃厚的興趣。作者翻閱了相關書籍與網站，像許志農教授的網站《算術講義》，還有一些翻譯書籍等，但在某些網站中，發現他們使用的方法繁雜，有些文章內容有錯，因此作者想要藉著這次科展的機會，利用遞推關係、佩爾方程式(含推廣型)和同餘定理，快速找出這種數， 對這個問題做深入的研究和探討，還有找出中心多角數的規律和解法，並證明了一個文獻上關於三重多角數的猜想。

411031109 羅允澤

研究目的:

1. 尋找多角數的通式。

2. 是否有 3-4 角數(同時是三角數又是四角數的數)、4-5 角數、3-5 角數？這種數有多少個？模式為何?如何求出 3-4 角數、4-5 角數、角數？如何改進求出 3-4 角數、4-5 角數、3-5 角數的速度？

3. 三角 K 角數、四角 K 角數、五角 K 角數的存在性和個數與模式為何？

4. 任意雙重(a-k)多角數的存在性和個數與模式為何？

5. 三重多角數的存在性和個數與模式為何？

6. 尋找中心多角數的通式。

7. 中心三角四角數的存在性和個數與模式為何？

8. 中心三角五角數的存在性和個數與模式為何？

9. 中心四角五角數的存在性和個數與模式為何？

10. 中心三角 K 角數的存在性和個數與模式為何？

11. 中心四角 K 角數的存在性和個數與模式為何？

12. 中心五角 K 角數的存在性和個數與模式為何？

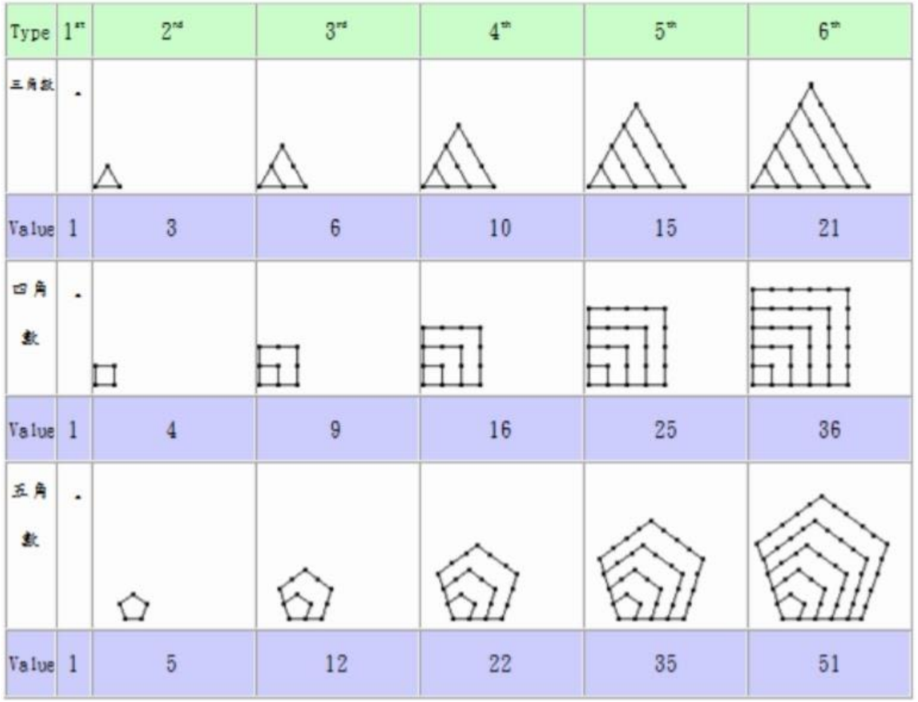
13. 雙重中心多角數(即同時是中心m角數和中心n角數的數)的存在性與模式為何？

14. 同時是多角數和中心多角數的數的存在性與模式為何？

15. 尋找平衡數和平衡子的本質和 NSW 數之間的關係為何?

16. 利用研究結果做一些應用。

1.定義：如上圖中，邊長為 n 的正 K 邊形陣列數我們稱之為第 n 個 K 角數。



Type	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
三角數	.					
Value	1	3	6	10	15	21
四角數	.					
Value	1	4	9	16	25	36
五角數	.					
Value	1	5	12	22	35	51

2. 第 n 個三角數 $=1+2+3+.....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

3.第 n 個四角數(平方數) $=1+3+5+.....+(2n-1)=n^2$

4.第 n 個五角數＝ $1+4+7+...+(3n-2)=\dfrac{n(1+3n-2)}{2}=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

5.我發現本質上，第 n 個 K 角數為一「等差級數」，公差為(k-2)，項數共 n 項，所以**第 n 個 K 角數**＝$1+(k-1)+....+(1+(n-1)(k-2))=$

$$\frac{n(2+(n-1)(k-2))}{2}$$

411031109 羅允澤

二、三角四角數問題

以下過程之中，「佩爾方程」為使用工具，所以先簡略介紹一些「佩爾方程」及其相關知識。

(一)佩爾方程

1.佩爾方程的定義：型如 $x^2-dy^2=1$，其中 d 為非完全平方數的正整數，稱這樣的不定方程為佩爾方程。

2.定理 1：佩爾方程 $x^2-dy^2=1$ 的正整數解一定存在且有無限多組，若最小的正整數解為 (x_1,y_1)，則所有的正整數解 (x,y) 為

$x+y\sqrt{d}=\left(x_1+y_1\sqrt{d}\right)^n$，其中 n 為正整數。

(二)三角四角數(三角平方數)的存在性和個數問題：

假設第 n 個三角數=第 m 個四角數（平方數），則 $\frac{n(n+1)}{2}=m^2$

$\Rightarrow (2n+1)^2-2(2m)^2=1$

令 $x=2n+1$，$y=2m$

則 $x^2-2y^2=1$ 為一佩爾方程必有無限多組正整數解，

又 $x^2=1+2y^2$ 必為奇數，所以 x 必為奇數，若 $x=2n+1$ 則

$2y^2=(x+1)(x-1)=2(n+1)\times 2n \Rightarrow y^2=2n(n+1)$ 為偶數，所以 y 必為

偶數，所以(m,n)也有無限多組正整數解。因此**三角平方數存在，且有無限多個**。

411031109 羅允澤

010046：

整係數多項式裡有乾坤——平衡多項式

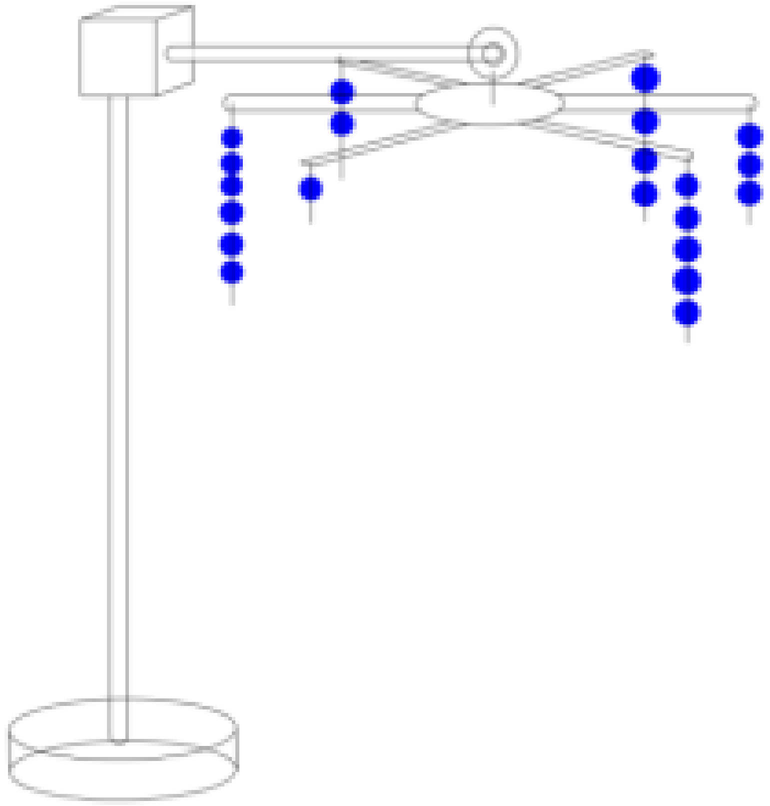
得獎名次：二等獎

類別分析：多項式

By:411031106 張心玫

研究動機:

有一個遊戲是：「將1g、2g、3g、4g、5g、6g等砝碼分置於一個圓盤上使之平衡。」(如下圖)。



玩了許久僅發現只有兩組解及其排序是1、4、5、2、3、6以及1、5、3、4、2、6的兩組(如圖2、3)，心想是否還有其他的排序？而將此兩組係數建構一對應的多項式分別可得$1+4x+5x^2+2x^z+3x^4+6x^5$以及$1+5x+3x^2+4x^3+2x^4+6x^5$而此兩多項式均有一共同因式x^2-x+1，於是我們好奇為何有此兩平衡多項式這一個因式，且x^2-x+1之根又均在$x^6=1$的分圓上，因此展開我們一連串的探索！

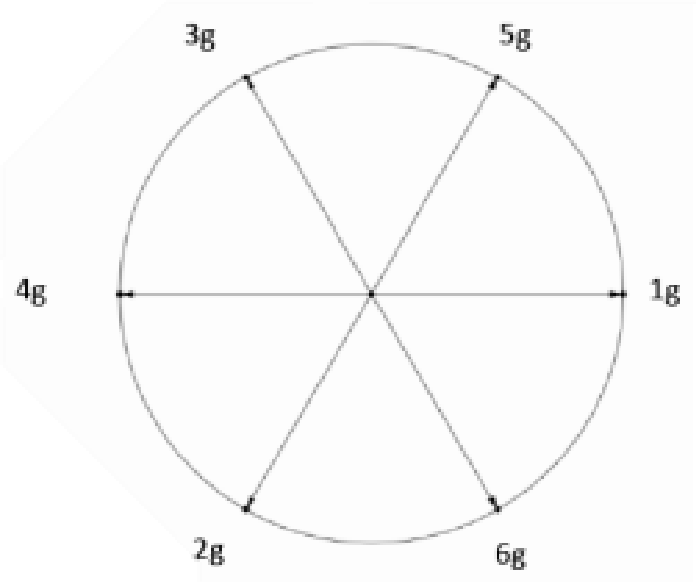


圖 2

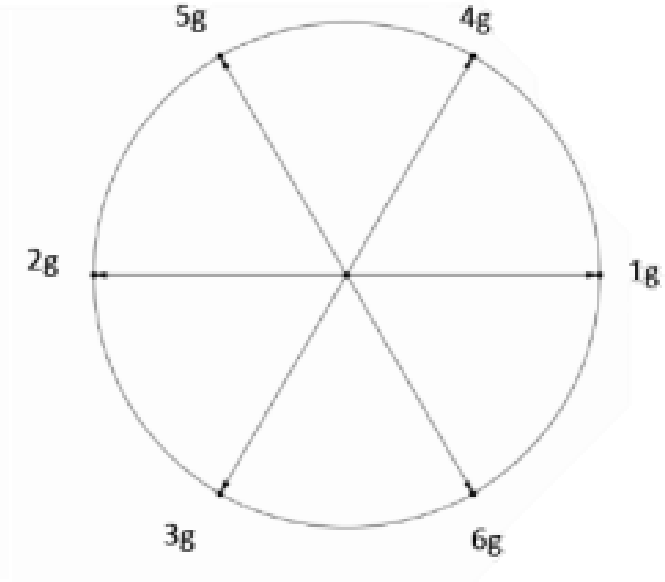


圖 3

411031106 張心玫

研究目的:

1. 一階平衡多項式：$f_n^1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$，其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 為 $1, 2, \cdots, n$ 的一種排列，且 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 可圍成等角 n 邊形。

2. t 階平衡多項式：$f_n^t = a_0^t + a_1^t x + a_2^t x^2 + a_3^t x^3 + \cdots + a_{n-1}^t x^{n-1}$，其中 $a_0^t, a_1^t, \cdots, a_{n-1}^t$ 為 $1^t, 2^t, \cdots, n^t$ 的一種排列，且 $a_0^t, a_1^t, \cdots, a_{n-1}^t$ 可圍成等角 n 邊形。

3. 分圓多項式：$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{1 \le k < n \\ \gcd(k,n)=1}} (x - \omega^k)$，其中 ω 為 $x^n - 1 = 0$ 的根。

411031106 張心玫

010009:

雙橢圓交點軌跡之研究

得獎名次：第三名

類別分析：幾何

By:411031108魏碩廷

研究動機：

由橢圓的定義：平面上到兩個固定點的距離之和是常數的軌跡，因此若在平面上任取到兩固定點的距離之和等於另外兩固定點的距離之和，其軌跡將呈現什麼性質？由此問題出發，進一步深入探討其內涵。

411031108魏碩廷

研究目的：

在座標平面上，給定任意四點A、B、C、D，存在一動點P滿足$\overline{PA}+\overline{PC}=\overline{PB}+\overline{PD}$。討論當$\overline{AC}\perp\overline{BD}$且$\overleftrightarrow{BD}$通過$\overline{AC}$中點（即四邊形ABCD為鳶形）。

1. 求出 P 點軌跡曲線的代數方程式
2. 曲線隨四點相對位置改變的變化情形
3. 探討曲線是否平滑(smooth)
4. 研究其他幾何性質

010022：

在地表上畫畫–
球面上的尺規作圖

得獎名次：三等獎

類別分析：幾何

By:411031142 倪詩晶

研究動機:

當時他們想像拿著尺和圓規在球面上作圖時，感覺和以往平面尺規作圖的經驗有很大的不同，有些東西例如量出一個球的半徑、n等分一個弧長、畫正方形等。有些真的很不好畫，甚至畫不太出來，而且有些平面上尺規作圖的方法在球面上不能用，球面尺規作圖也有一些平面沒有的作圖方法，於是我們想要知道在兩套不盡相同的作圖方式下，球面尺規作圖究竟可以畫出哪些圖形，有哪些是平面畫不出的，又有哪些是平面可以畫而球面畫不出來的。

411031142 倪詩晶

研究目的：

想要知道球面尺規作圖究竟可以畫出哪些圖形，有哪些是平面畫不出的，又有哪些是平面可以畫而球面畫不出來的。

010034:

有趣的切披薩問題

得獎名次：三等獎

類別分析：幾何

By:411031136 陳筠婷

研究動機:

有一天，老師在數學課後提出一個很有趣的問題，讓我們試試看，這個問題是求圓形披薩如何切割會造成輪流拿取的兩人分得一樣多，或者拿到圓心的人分得較多或較少的問題。我們認為很有趣，也變化出更多豐富的問題。老師鼓勵我們繼續深入研究，本篇作品主要在研究披薩定理（Pizza theorem）及其推廣或類比的定理，我們也介紹了一些簡單應用及推廣。

在「Of Cheese and Crust: A Proof of the Pizza Conjecture and Other Tasty Results」當中提到，披薩定理問題最早在1967年《數學雜誌》（Mathematics Magazine）上由厄普頓（L.J.Upton）提出，隔年郭德堡（M.Goldberg）在同一期刊上證明了切偶數刀兩人會分得一樣多的披薩。但切奇數刀才是真正難題的開始，它一直沉寂到了1994 年，兩位數學家Rick Mabry 及 Paul Deiermann 加入研究，經過多年來在無數的代數學已有的模型中辛勤搜索，他們終於從一篇1979 年的論文中找到了所需的模型，最後問題在 2009 年終於迎刃而解。此外，在第50屆全國科展高中組作品「披薩西瓜怎麼切」、 論文「The pizza theorem」裡都有一些相關的研究，我們因此決定要針對這個題目，做更多的延伸討論。

研究目的:

先討論披薩定理切4刀的情形，並且利用較初等的數學方法（不涉及極座標及微積分）證明，再推廣到切2n(n≧2)刀時披薩定理的證明。然後我們將問題從依逆時針序輪流選取的區塊面積和轉為輪流選取線段長的和，討論、證明過任一圓內任一點P切2n+1刀，使每一組相鄰割線角度皆相同，由P到圓周的切割線段，依逆時針序從任一條開始取的奇數線段長和與偶數線段長和相等。

接著討論任一圓的圓周上任一點到圓內接$2n+1$邊形各頂點的連線段，依逆時針序從最左或最右邊一條開始取，奇數線段長和與偶數線段長和相等。再來我們證明了任一圓的圓周上任一點到圓內接正 $2n(n\geqq 2)$邊形各頂點連線所圍成的區塊，依逆時針順序從最左或最右邊一塊開始取，奇數區塊面積和與偶數區塊面積和相等。之後我們證明了任一圓形披薩中，過內部任意指定點切$kn(n,k\geqq 2)$刀，使每一組相鄰割線角度皆相同，讓k個人按逆時針順序從任一塊開始輪流取走披薩片時，這k人拿到的披薩片面積和一樣多。

同時我們也證出了過任一圓內任一點 P 切 kn(n, k≧2)刀，使每一組相鄰割線角度皆相同，由點 P 到圓周的所有切割線段，分 k 組從任一段開始依逆時針序每間隔 k 段取一段，則各組取出的線段長度平方和相等；並且證出了任一圓的圓周上任一點到圓內接正 kn (n, k≧2)邊形各頂點的線段，分 k 組從最左邊第 i (1≦i≦n)段開始依逆時針序每間隔 k 段取一段，則各組取出的線段長度平方和相等。

最後我們證明了任一圓的圓周上任一點到圓內接正kn(n, k≧2)邊形各頂點連線所圍成的區塊，分 k 組從最左(或最右)第i(1≦i≦n)區塊開始依逆時針序每間隔k區塊取一區塊，則各組取出的區塊面積和相等。

010035:

特殊形pell方程式之矩陣解研究

得獎名次：第三名

類別分析：代數/矩陣

By:411031108魏碩廷

研究動機：

本研究接續去年的研究主題”驚奇的數”，探討邊長為平方數的三邊形數亦為四邊形數的問題。這個問題相當於討論某一類Pell方程式的解，處理方法分為兩類：第一類可以使用矩陣計算來討論，已討論出附帶方程式部分的初始解情形，第二類無法使用矩陣計算，利用因式分解的技巧處理，發現這部分的結果與切比雪夫多項式有著密切關係。

當使用矩陣計算時，我們將其結果做初步分類，發現在部分情況此矩陣計算只能求得部分的解，但尚未找出此方法漏解的原因及改善的方法。另外，在無法使用矩陣計算的部分，經由因式分解取得大量資料後，發現其餘的關係，但尚未發現其與切比雪夫的關係。接續去年國際科展的研究，今年聚焦於矩陣計算的漏解問題以及對數據做詳細分析、歸納，嘗試去改進並縮小窮舉的範圍以求效率較高的方式。

研究目的：

1. 重新對主方程式的解進行分類，並試圖解釋每一組所代表的意義及漏解的原因。
2. 改進矩陣計算的理論以避免漏解。
3. 已研究可以避免漏解的方法，需檢查主方程式的解之間是否有不屬於由經由有限次數運算所推得的解，但此方法無可避免的需要在有限範圍內窮舉，因此致力於縮小窮舉的範圍以提高效率。

411031108魏碩廷

010002：

勻稱分割

得獎名次：四等獎

類別分析：幾何

By:411031109 羅允澤

研究動機:

在之前的研究中，探討了多邊形內部分割的相關性質，而在研究中只探討有關所有點秩數均為單一種秩數之分割情形。因此我們思考是否存在一個全分割，其有多種秩數之分割情形？我們決定朝這個方向研究。

研究目的:

1. 探討 (n, m, n)勻稱分割在各種不同秩數狀態下其解的情形。
2. 探討(n, m, n)勻稱分割在 k 種不同秩數狀態下(k>3)，其解的存在性與否。
3. 運用數學軟體 GSP 將所有 (n, m, n)勻稱分割其解的圖形繪出。

010018:

棋盤中矩形周長和最小的分割策略

得獎名次：四等獎

類別分析：幾何

By:411031136 陳筠婷

研究動機:

在IMO第50屆預選題的組合題之中，有一個題目：

對於正整數m，先將$2^m \times 2^m$的棋盤中一條對角線上的2^m個方格各自分割為邊長為1的正方形，接著再將剩下的區域分割為不重疊的矩形。考慮所有這樣的分割，求所有矩形周長之和的最小值(包括對角線上的2^m個正方形)。

對於此題已有了解答，而且周長達到最小值的情況十分直觀。但我們想知道當棋盤改成$n \times n$時是否也可以此方法求出最小值，更甚，若改成矩形棋盤情況會如何？我們知道若不給「對角線」這個限制，那麼達到周長最小值時一定是整個棋盤(不分割)，但若題目假設的條件不是對角線而有其他限制呢？上述問題促成了此次研究。

研究目的:

1. 研究$2^m \times 2^m$棋盤的證明以及分割方式。
2. 討論當棋盤從邊長為2^m的正方形變成邊長為n的正方形時如何分割會使周長達到最小值，並給出一般情況的解答。
3. 探討棋盤變成$m \times n$矩形時如何分割會使周長達到最小值，並給出一般情況的解答。

411031136 陳筠婷

010021：

NICE數-正方形與正立方體的切割

得獎名次：四等獎

類別分析：幾何

By:411031106 張心玫

研究動機:

在「數學思考」這本書 P90 提到「正方形的分割」

原題目
正方形的分割將一個正方形切成不重疊的正方形，所得的個數就可被稱作NICE(好的)，問有哪些數是NICE數？

另外，書上還更進一步介紹三維的狀況「合乎條件的被稱為 very NICE」，我們把書上的定義再寫的更清楚一點，請看底下呈現：

立方體的分割
將一個正方體切成不重疊的正方體，所得的個數就可被稱作very NICE(非常好的)，問有哪些數是very NICE 數？

411031106 張心玫

　　「數學思考」這本書上對於very NICE 的部份敘述的比較少，書上提到:人們猜想只要比47大的自然數就都是very NICE 數，但目前對這幾乎沒什麼了解，讓我感覺蠻有挑戰性的，於是便著手進行研究。

研究目的:

1. 找出哪些數是NICE 數，並找出其切割法。
2. 找出哪些數是very NICE 數，並找出其切割法。

411031106 張心玫

010047：

以直向、橫向、斜向磁磚鋪滿$m \times n$矩形的研究

得獎名次：四等獎

類別分析：遞迴數列、矩陣

By:411031142 倪詩晶

研究動機:

從一個叫做 Connectors 的遊戲中，發現一個題目可能會有一個以上解。這種情況觸發了他們對於鋪磁磚的研究：如果除了使用直向、橫向的磁磚，再加上 「斜向的」磁磚來鋪滿一個矩形，這與只使用直向、橫向的磁磚的鋪法有哪些方面的相同與相異？

411031142 倪詩晶

研究目的：

找出拼湊的方法數與矩形的長度、寬度的關聯。

感謝聆聽！！

Thank you for listening~

第二組