數學思維與解題

2014台灣國際科學展覽會
第03組報告

作品介紹

戴世勳411031102

大會獎：

作品名稱

少年π的奇幻旅程-從不對稱切割到加權校正法

摘要

自古以來，多邊形演算的幾何法求圓周率，往往只由單側——內側或外側。

既然我們可以算出兩側的多邊形數據

那為什麼不用夾擠法來得到更精確的π值呢？

研究目的

角平分線斜率r與角度對應的探討

研究目的(一)

藉由通式解來發展出角平分線斜率為有理數r的角度運算系統

不對稱切割法

研究目的(二)

探討**不對稱切割**下，以有理數r的角度運算系統，來切割圓周的公式

並初步計算圓周率

加權校正法

研究目的(三)

研究圓的(外切多邊形與內接多邊形)和(圓面積差的比值)

導出**圓面積校正公式**

π值代數式

研究目的(四)

以級數和逼近π值，證明切割+校正地逼近與夾擠定理

研究目的

研究目的(五)

1. 發展不對稱切割數值分析法之計算公式
2. 研究不對稱切割單一累積分量的精確度
3. 使用不對稱切割來推演出全新的加權校正函數
4. 研究**加權校正法函數化的方向**

→ 探索不對稱切割與加權校正法所引導出的餘角收斂定理

流程圖：

推論方向

內容說明

一、角平分線斜率r與角度對應的探討

有理數r：賦予通式解內m、n在幾何上的意義。

角度切割：證明不對稱切割下，斜率有理數r的計算公式。

二、不對稱切割法

π值衍生逼近理論：透過有理數r與角度θ的對應關係，證明π值有理逼近計算法。

不對稱切割法：單位圓中，角平分線斜率總和可逼近半圓周長π，切割越細越精準。角度切割有多種方法，本文設計兩種切法：

簡單切割之單母角：$\angle A_1$切成$\angle A_2+\angle R_2$，易有規律性。

多角切割之多母角：$\angle A_1$切成$n\angle A_2+\angle R_2$，分割速度快。

三、加權校正法

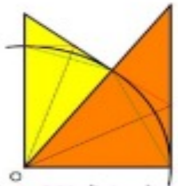
外切內接多邊形與圓面積差比：討論圓的外切多邊形與內接多邊形，與圓面積差的比值，並導出圓面積校正的**加權比例常數**。

不對稱切割＋加權校正法：單位圓中，角平分線斜率總和可逼近圓面積π。將常數代入，以校正π值。

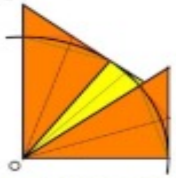
π值比較：以上述各類方法所求得之π值，來討論其逼近速度。

單母角&多母角

單母角：90° 角為例，切出一個比較大的母角(橙色)與一個比較小的餘角(黃色)。



多母角：90° 角切出二($n=2$)個比較大的母角(橙色)與一個比較小的餘角(黃色)。

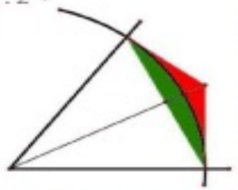


四、π值代數式

以級數和逼近π值，證明切割＋校正的逼近與夾擊定理。

加權比例常數

即紅綠色面積比值。當扇形角度越小時，紅綠色面積比越趨近1:2。



五、繼往開來

梅欽類公式與arctan級數的討論。

深入研究不對稱切割之計算理論與公式，並探索加權校正函數與餘角收斂定理。

作品介紹

李柔樺411031123

作品名稱	連續正整數的鈍角三角形分割
得獎名次	大會獎：二等獎
研究目的	對於集合 $S=\{k,k+1,...,k+3n-1\}$，考慮其所有三元子集的劃分，研究其中所有子集皆含有的一致性：鈍角三角形。 一、給定 n 值求出 k 的最小值的上下界。 二、給定 n 值求出 k 的所有值的上下界。 三、給定 n 、k 時構造出其鈍角三角形的劃分。
分析作品	本作品發想自 52^{nd} IMO Problem Shortlist with Solutions中的題目：考慮集合 $S=\{2,3,...,3n+1\}$，試證明：可將其分成 n 個兩兩不相交的三元子集，使得任一子集中的三個數恰好是某鈍角三角形之三邊長。

舉例

- 給定正整數k，將 $S_{k,n}=\{k,k+1,\ldots,k+3n-1\}$分割成$n$個兩兩互斥的三元子集，使得任一子集中的三個數恰好是某鈍角三角形的三邊長。(簡稱為鈍角三角形劃分)

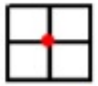
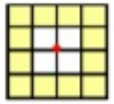
$S_{3,2}=\{3,4,5,6,7,8\}$可做出 $\{\{3,5,7\},\{4,6,8\}\}$的鈍角三角形劃分。

$S_{4,2}=\{4,5,6,7,8,9\}$可做出 $\{\{4,6,8\},\{5,7,9\}\}$的鈍角三角形劃分。

作品名稱	潘朵拉的正鑲嵌圖塗色秘密
得獎名次	大會獎：三等獎
研究目的	利用數學分析、賦值法解析技巧、歸納方法，並引用一元二次不等式、數列與級數、極限、二次函數等基本數學技巧，求解由正方形、正三角形、正六邊形正則鑲嵌、及數種阿基米德鑲嵌，在限制每一格相鄰格子中至多有x格被塗色的情形下的最大塗色格子數和至少有x格被塗色的情形下的最小塗色格子數的問題。
分析作品	本作品發想自2011年澳洲數學競賽試題：在一個40×40的格子方陣中，對任意一個格子塗上紅色，但限制每一個格子其無論是否被塗上紅色，與其相鄰共用邊的四個格子至多有一個格子是紅色的，求解在40×40的格子方陣中最大有多少個的格子可被塗上紅色?

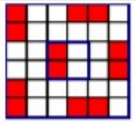
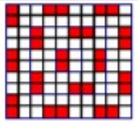
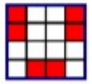
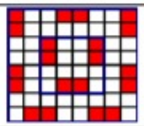
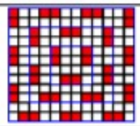
說明

以頂點為中心(Vertex-centred)的正則鑲嵌：在正則鑲嵌中，使具備全等形狀多邊形的共用頂點居中心排列，並沿著邊(Edge)與頂點(Vertex)逐次向外擴展進行鑲嵌。令 $\mathrm{T_v}(k)$、$\mathrm{S_v}(k)$、$\mathrm{H_v}(k)$ 分別代表由正三角形、正方形、和正六邊形覆蓋，形成的以頂點為中心的 k 層正則鑲嵌。下表[9]分別舉例說明 $\mathrm{T_v}(k)$、$\mathrm{S_v}(k)$、$\mathrm{H_v}(k)$ 在 $k=1,2$ 的情況：

		
$\mathrm{T_v}(1)$	$\mathrm{S_v}(1)$	$\mathrm{H_v}(1)$
		
$\mathrm{T_v}(2)$	$\mathrm{S_v}(2)$	$\mathrm{H_v}(2)$

$M(\mathrm{P},k,x)$：表示在以多邊形 P 組成的正則鑲嵌或半正則鑲嵌圖中，當圖形有 k 層、且限制每一格的相鄰格子中至多有 x 格被塗色的情形下，最大的塗色格子數。

$M(\mathrm{S_V},k,1)=k^2+k$，塗色方式舉例如下：

		
$M(\mathrm{S_V},1,1)=1^2+1=2$	$M(\mathrm{S_V},3,1)=3^2+3=12$	$M(\mathrm{S_V},5,1)=5^2+5=30$
		
$M(\mathrm{S_V},2,1)=2^2+2=6$	$M(\mathrm{S_V},4,1)=4^2+4=20$	$M(\mathrm{S_V},6,1)=6^2+6=42$

作品介紹

潘柏銓411031103

跳線減距

2014台灣國際科學展覽三等獎
作者:劉穎立
指導老師:呂雲瑞，王欣慈

研究動機

- 從一條線段的一端走到另外一端，原本需要經過整條線段，如果在中間加上幾條跳線(好像直航飛機航線)，使得路徑能夠從某一點經過跳線快速移動到另一點，那麼跳線要加在哪裡，才能使得距離變得最短

研究目的

- 找出跳線的最佳配置使兩點距離最短
- 利用結論最佳化大眾交通規劃

研究問題

- 研究線段上加跳線的最佳位置及最短直徑
- 黏合圖形以及其與跳線圖形的關係

研究方法概述

在一條線段上加k 條跳線

將每條跳線連接的兩個跳點分別黏合成節點

將所有繩圈、繩橋和尾巴的長度平分成k+1組，因為線段總長為 1，所以平均數為$\frac{k}{k+1}$

by最大數定理，在所有長度中最大2數≥$\frac{2}{k+1}$

最大數定理：在一串數中，最大的 m 個數之和會大於或等於此串數的 平均數的 m 倍。(m 為大於 0、小於此串數項數的正整數)

2數和> $\frac{2}{k+1}$ ⇒ 最大數會> $\frac{1}{k+1}$

最小直徑> $\frac{1}{k+1}$

2數和=$\frac{2}{k+1}$ ⇒ 2數皆為$\frac{1}{k+1}$

研究結論與應用：公車站牌配置

- 結論：在線段上加 1 條、2 條和 3 條跳線時，最短直徑分別為$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$和 $\frac{1}{4}$， 在線段上加 k 條跳線、黏合圖形中一個和二個節點時，最短直徑皆為 $\frac{1}{k+1}$。
- 應用：蓋高架橋、規劃飛機航線、建高鐵、捷運、高速公路等交通設施。或解決如何設置郵局、服務據點。

孟氏定理與西瓦定理在多邊形與多面體中 的推廣

2014 年臺灣國際科學展覽四等獎
作者：許喬婷
指導老師：鄭仕豐

研究動機

- 課外補充到『孟氏定理』與『西瓦定理』
- 成功推廣其至n邊形

研究目的

- 將孟氏定理在凸n 邊形上的推論轉變在n 條直線上的推論
- 西瓦定理在凸(或凹)n 邊形上的推論。
- 推廣至空間

研究問題

- 孟氏定理在相交n線的成立-在n頂點的立體成立
- 西瓦定理在凸(或凹)n 邊形上的推論-n 個頂點多面體的西瓦共點定理

結論與展望

- 將孟氏定理推廣到n 條直線
- 西瓦定理(孟氏對偶命題)推廣至n條直線
- 找到『n 個頂點多面體』的『西瓦共點定理』 之形式
- 展望：找出球面上的相應成果

作品介紹

林亮辰411031107

作品名稱	棋子移動最小值問題探討
得獎名次	大會獎四等獎
研究目的	探討最優化:給定特定移動方式，求出至少要多少次操作才能把棋子從某一種分布狀態調整成另外一種
作品分析	1.n*n的棋盤，n個棋子，使得每行每列都恰有一顆棋子，每次移動遵循水平或垂直移動一格，目標是把所有棋子移動到其中一條對角線，即對角線上的每一格皆有一顆棋子，求最小A(n)對於任何初始狀況之下，至多需要A(n)次操作能夠完成目標 2.n為正偶數，n*n的棋盤，2n個棋子，使得每行每列都恰有二顆棋子，每次移動遵循水平或垂直移動一格，目標是把所有棋子移動到兩條對角線，即兩條對角線上的每一格皆有一顆棋子，求最小B(n)對於任何初始狀況之下，至多需要B(n)次操作能夠完成目標

作品名稱	挑動心弦-弦長，圖心與新的圖形辨識
得獎名次	大會獎四等獎
研究目的	不論是哪一種圖形辨識的方法，都需要從最簡單的著手做起，因此作者想提供一個創新且有效率的圖形辨識方法
作品分析	1.過圓內一點弦長集合分布情形 2.過橢圓內一點的弦長集合分情形 3.由圓和橢圓進而探討不規則形的情況 4.用「圖心」和弦長建立可描述不規則圖形的數學模型 5.由數學模型進而推導到圖形辨識

作品介紹

黃俊穎411031113

作品名稱	**A piece of cake-四邊形切割之探討**
得獎名次	大會獎四等獎
研究目的	將一塊蛋糕推廣至切割四邊形，使得同樣是只切兩刀即可放入盒子的四邊形蛋糕(角度為 α、β、γ、θ)滿足：$k\alpha+l\beta+m\gamma+n\theta=0$ ，其中k 、 l、m、n為整數且不可同時為零。
作品分析	一開始就給出將任意三角形割成三塊再放入對稱盒子的切割方式，但對於某些特殊三角形卻是可以只割二塊，於是教授更進一步證明：如果一個三角形蛋糕只切兩塊即可放入與蛋糕呈鏡射的盒子，蛋糕 的角度(α、 β、γ)就會滿足此線性組合：$k\alpha+l\beta+m\gamma=0$ ，其中k、l、m為整數且不可同時為零。由這個結論並給出一個不能割成二塊放入對稱盒子中的三角形，確認了對所有一般的三角形而言，割成三塊已是最少塊數的割法。

作品名稱	**同比例分點的建構與研究**
得獎名次	大會獎四等獎
研究目的	四面體 ABCD 及其內部四點 A’,B’,C’,D’ 使得他們分別為 AB' , BC',CD' , DA' 中點。將條件的中點推廣為比例 k 的分點，得A'B'C', D'。我們稱 A’, B’, C’, D’為比值為 k 的同比例分點，並稱四面體 A’B’C’D’ 為分點四面體；同時將類似的命題推廣至 n 維。
作品分析	1. 基本性質 2. 度量性質 3. 分點軌跡 4. 追逐問題

3等獎-藏寶旋跡

主要作品詳述

曾淯湞410731248

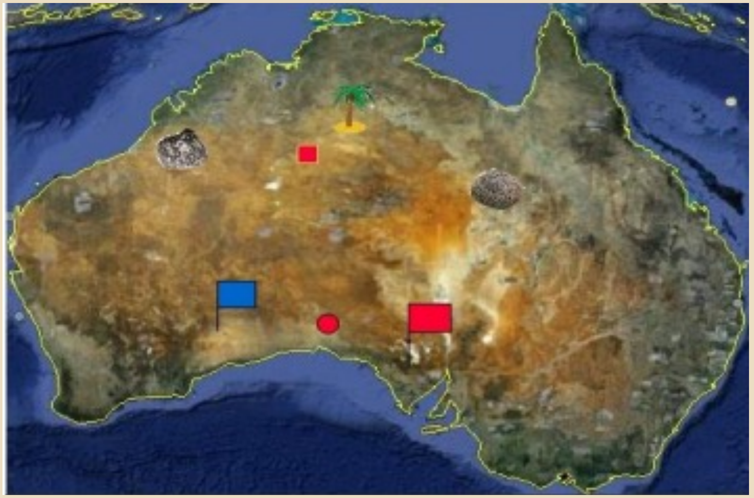
作品簡介

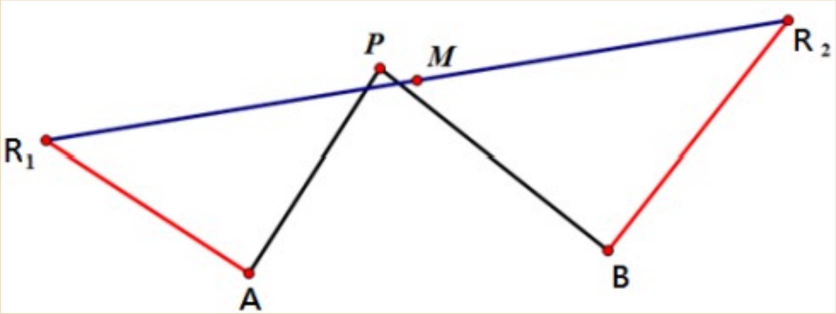
作品名稱	藏寶旋跡
作品年分/名次	2014年/大會獎-3等獎
作者就讀	國立臺南第一高級中學
摘要	從海盜藏寶的情境出發，主要探討旋轉角度和平均點與加權點之間的關係。藉由增加旋轉中心個數，改變旋轉角度或旋轉次數等變項，來探討固定點的存在性與加權點的軌跡變化。於研究過程中發現，操控旋轉角度的正負值、倍率及加入旋轉後伸縮，能讓動點與加權點(平均點)間的移動軌跡有相似圖形、繞圓、橢圓、內(外)次擺線及各種數學上未定義，我們稱之為 n 階行星與齒輪圖形等豐富有趣的現象變化；將問題延伸，除了旋轉及旋轉後伸縮以外，同時有多組不同伸縮在進行時，所得到的加權點軌跡會形成次擺線和向前直進(或在直線上滾動)的多層行星與齒輪圖形。推廣至空間中的旋轉，更可發現橢圓的軌跡。

研究動機

傑克船長曾在阿里巴島上藏寶藏。他先從島上 P 點處的一棵椰子樹，對石頭 A點逆時針旋轉90°至R1，並插上一面旗子於R1點，接著走回椰子樹 P 處，再對石頭B點順時針旋轉90°至R2，並插上另一面旗子於R2點，最後在R1與R2的中點 M 處藏下寶藏。

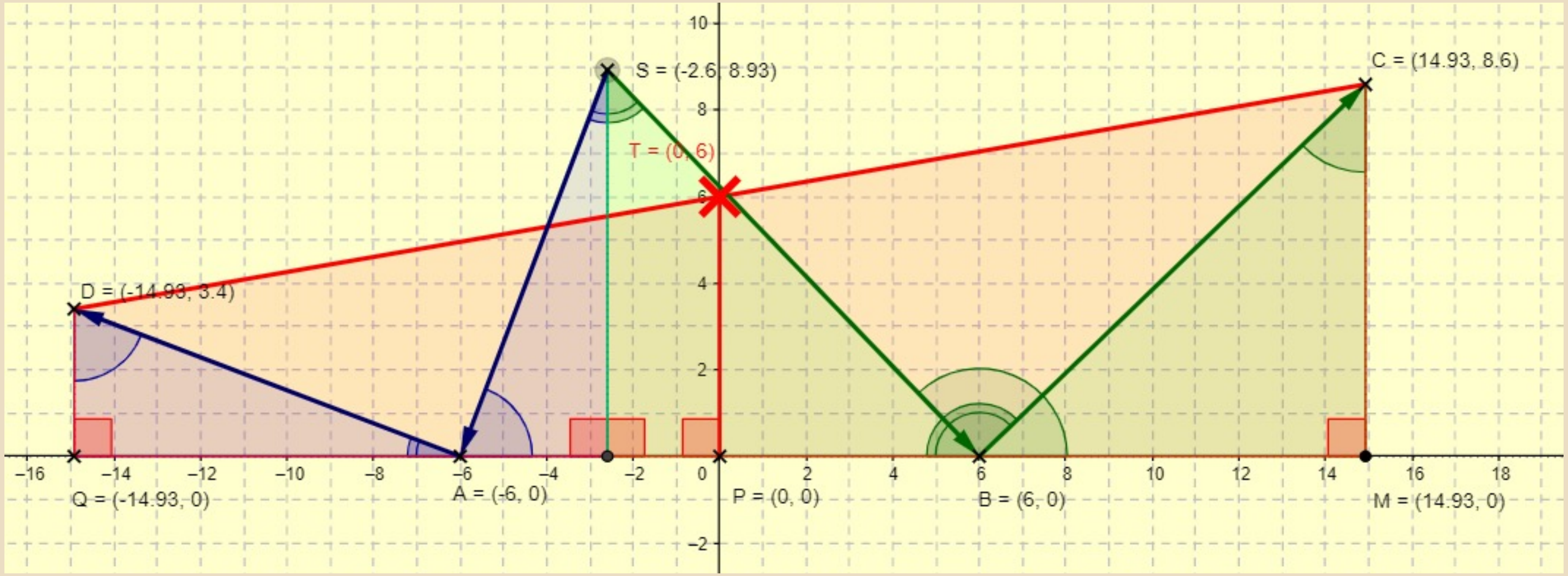
一年後，傑克船長想回到阿里巴島挖出寶藏，但島上的椰子樹 P 和兩面旗子R1、R2都已被暴風吹走，只留下兩顆石頭A、B未被移動。請問：傑克船長該如何找到寶藏 M 點呢？





ANSWER

這個問題的解答是：以兩顆石頭 A、B 的中點為旋轉中心，將 A 點順時針旋轉90°，所得到的點便是藏寶地點 M。用 Geogebra 軟體實際操作，發現這並不是巧合的結果，因為不論椰子樹 P 點的位置在哪裡，藏寶地點 M 的位置其實都不會改變，因此我們將 M 稱為固定點。



- 荒島尋寶 – GeoGebra

研究目的

- 一、證明傑克船長故事內的 M 點是固定點，不受動點 P 影響。
- 二、探討將兩個旋轉中心(石頭)延伸至多個旋轉中心(石頭)時，也會有相對之固定點存在。證明此論點並發展出一個找出此固定點坐標的可行方法。
- 三、將固定點 M 由平均點推廣至加權點，並在每個旋轉完成後，將得到的點對該旋轉中心再作伸縮，找尋 M 再次成為固定點所需要的旋轉條件。(註：四、五、六、七、八中所指的加權點皆為旋轉後再加上一個伸縮倍率的形式所得之加權點)
- 四、 在尋找固定點的過程中，發現加權點(平均點)M 的移動軌跡會和動點 P 的移動軌跡相似，找出其原因並證明。再推廣至 n 個旋轉中心在 P 點改變時也同時變動，且其移動軌跡皆與 P 的軌跡相似時，證明此相似軌跡狀況亦成立。
- 五、對於多個旋轉中心，操控各個旋轉角度的差值、正負與兩項倍率為變項，探討加權點(平均點)M 的移動軌跡變化情形，證明出有繞圓、橢圓、內(外)次擺線等情況。
- 六、各種多旋轉中心的相關研究......

名詞解釋

- 一、固定點

  以固定規則使定點與動點製造出一反應點，當動點位置任意改變時，其反應點位置不變， 則稱其反應點為固定點。

- 二、平均點

  設R1，R2，⋯ ，Rn為平面上 n 個點，將R1，R2，⋯，Rn的坐標相加再除以 n 得 到 M 點， 即 $\overrightarrow{OM}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{OR_k}}{n}$，(其中 O 為原點)，則稱 M 為R1，R2，⋯ ，Rn的平均點。

- 三、加權點

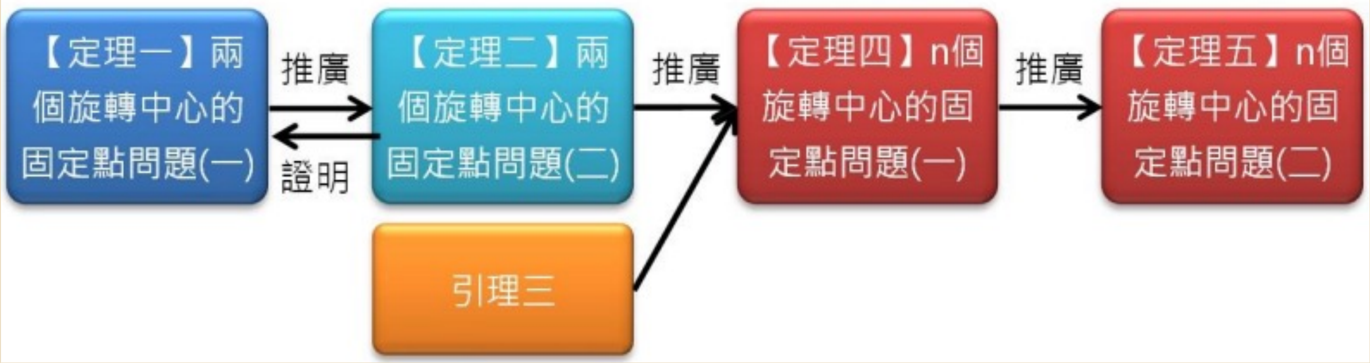
  設R1，R2，⋯ ，Rn為平面上 n 個點，將R1，R2，⋯，Rn的坐標分別乘以h1， h2， ⋯，hn後相加，再除以(h1 + h2 + ⋯ + hn)，得到 M 點， 即$\overrightarrow{OM}=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_k\overrightarrow{OR_k}}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$，(其中 O 為原點)，則稱 M 為R1，R2，⋯ ，Rn分別以h1，h2，⋯ ，hn為加權倍率所得到的加權點。簡化符號，記為

$$\mathrm{M}=\frac{\sum_{k=1}^{n}h_kR_k}{\sum_{k=1}^{n}h_k}$$

研究架構

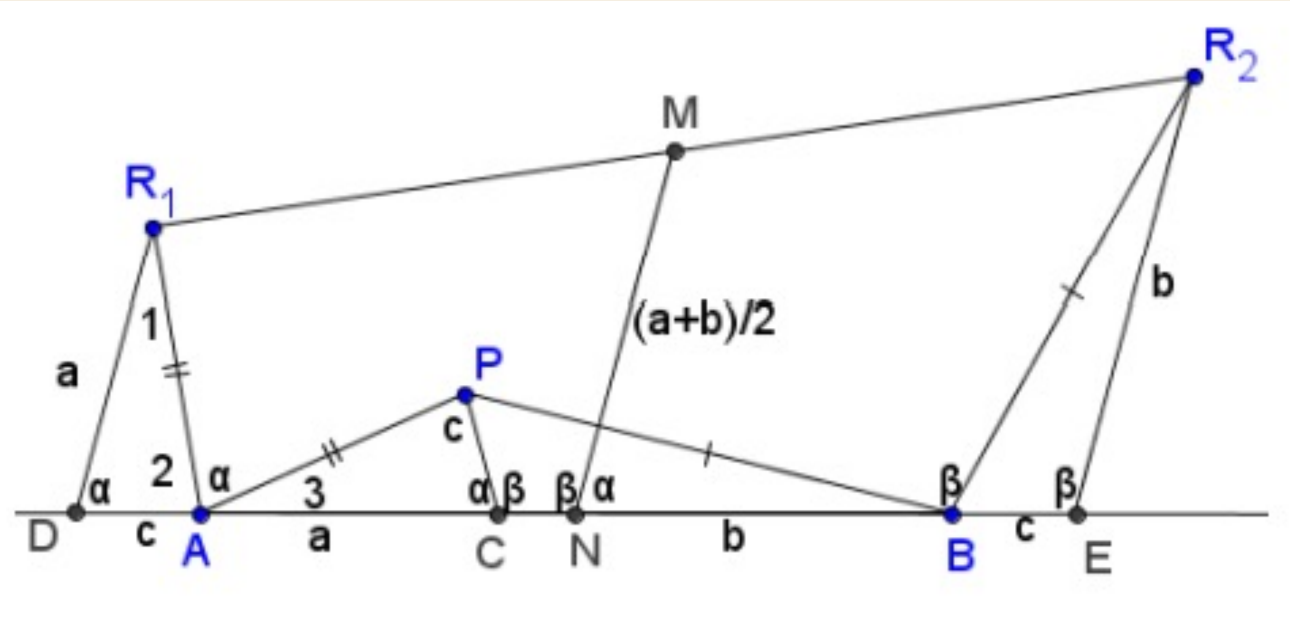
- 固定點問題
  - 旋轉角度90
  - 旋轉角度不固定
  - 多個旋轉中心
- 相似軌跡問題
  - 旋轉任意角時加權點的軌跡特色
  - 同向相似形和反向相似形
- 加權點繞問題
  - 旋轉角$\boldsymbol{\theta}$變動時平均點的移動軌跡
  - 旋轉後加入伸縮
- 加權點橢圓軌跡問題
  - 操控旋轉角度的正負，平均點得到橢圓軌跡
  - 兩組旋轉時加權點的橢圓軌跡
  - 多組旋轉並且旋轉後加入伸縮時加權點的橢圓軌跡

固定點問題


【定理一】兩個旋轉中心的固定點問題(一)
推廣
證明
【定理二】兩個旋轉中心的固定點問題(二)
引理三
推廣
【定理四】n個旋轉中心的固定點問題(一)
推廣
【定理五】n個旋轉中心的固定點問題(二)

固定點問題(旋轉角度不固定)

- 平面上有兩定點 A，B，設 P(椰子樹) 為平面上另一點。以 A 為圓心，$\overline{AP}$ 長為半徑，將 P 逆時針旋轉α至R1；以 B 為圓心 ，$\overline{BP}$長為半徑，將 P 順時針旋轉 β至R2，其中α + β = 180°，令 $\overline{R1R2}$的中點為 M，證明：不論 P 點在平面上如何變動，M 恆為固定點。



證明在下一頁

固定點問題(旋轉角度不固定)相關證明▼▼▼

1. 如右圖連接$\overleftrightarrow{AB}$，連接$\overline{AR_1}$，$\overline{BR_2}$，依題意知$\overline{AR_1}=\overline{AP}$，$\overline{BR_2}=\overline{BP}$，

   作$\overline{PC}$交$\overleftrightarrow{AB}$於 C 點，使得$\angle PCA=\alpha$，則$\angle PCB=180^\circ-\alpha=\beta$，

   設$\overline{PC}=c$，$\overline{AC}=a$，$\overline{BC}=b$
2. 作$\overline{R_1D}$交$\overleftrightarrow{AB}$於 D 點，使得$\angle R_1DA=\alpha$，作$\overline{R_2E}$交$\overleftrightarrow{AB}$於 E 點，使得$\angle R_2EB=\beta$，

   因為$\alpha+\beta=180^\circ$，同側內角互補，所以$\overline{R_1D}//\overline{R_2E}$
3. ΔADR_1與ΔPCA中，

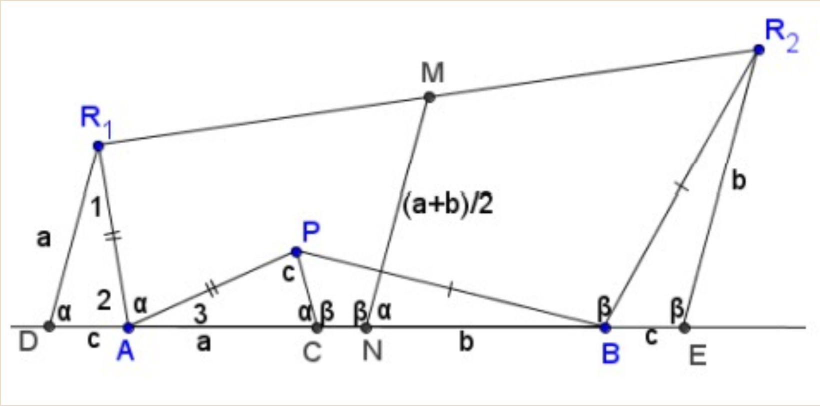
   $\because \angle 1+\angle 2=180^\circ-\alpha=\angle 2+\angle 3$

   $\therefore \angle 1=\angle 3$ 又$\angle PCA=\alpha=\angle R_1DA$，$\overline{AR_1}=\overline{AP}$

   $\therefore \Delta ADR_1 \cong \Delta PCA(AAS)$

   $\therefore \overline{R_1D}=\overline{AC}=a$，$\overline{DA}=\overline{PC}=c$

   同理$\Delta BER_2 \cong \Delta PCB(AAS)$ $\therefore \overline{R_2E}=\overline{CB}=b$，$\overline{BE}=\overline{PC}=c$



固定點問題(旋轉角度不固定)相關證明▼▼▼

4. ∵$\overline{R_1D}$ // $\overline{R_2E}$，作$\overline{MN}$使$\overline{MN}$ // $\overline{R_1D}$且交$\overleftrightarrow{AB}$於 N 點，

又∵M 為$\overline{R_1R_2}$中點∴$\overline{MN}$為梯形R_1DER_2的中線，N 為$\overline{DE}$中點

∵$\overline{MN}$為梯形R_1DER_2的中線∴$\overline{MN} = \frac{\overline{R_1D}+\overline{R_2E}}{2} = \frac{a+b}{2}$

∵N 為$\overline{DE}$中點且$\overline{DA}=\overline{BE}$∴N 為$\overline{AB}$中點∴$\overline{AN} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{a+b}{2}$

∵$\overline{MN}$ // $\overline{R_1D}$，∴$\angle MNB = \angle R_1DA = \alpha$

5. 以 A 為原點(0，0)，令 C 的坐標為(a，0)，畫出互相垂直的兩坐標軸，將圖形坐標化，

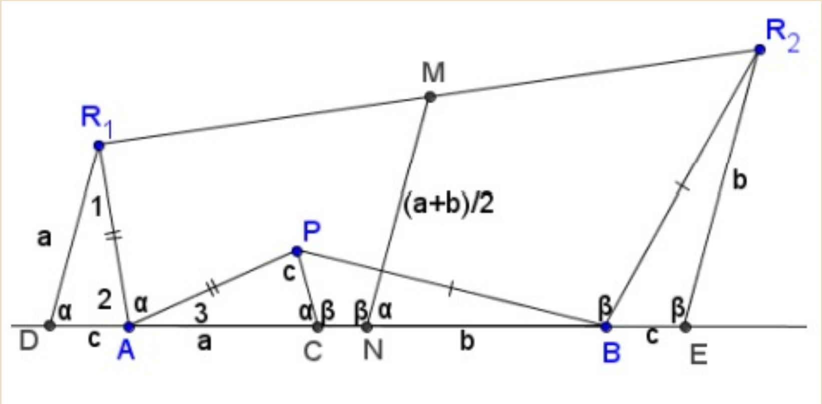
∵$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM}$

$=\left(\frac{a+b}{2}，0\right) + \left(\frac{a+b}{2}\cos\alpha，\frac{a+b}{2}\sin\alpha\right) = \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}\cos\alpha，\frac{a+b}{2}\sin\alpha\right)$

又 A 為原點(0，0)∴M 的坐標為$\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}\cos\alpha，\frac{a+b}{2}\sin\alpha\right)$

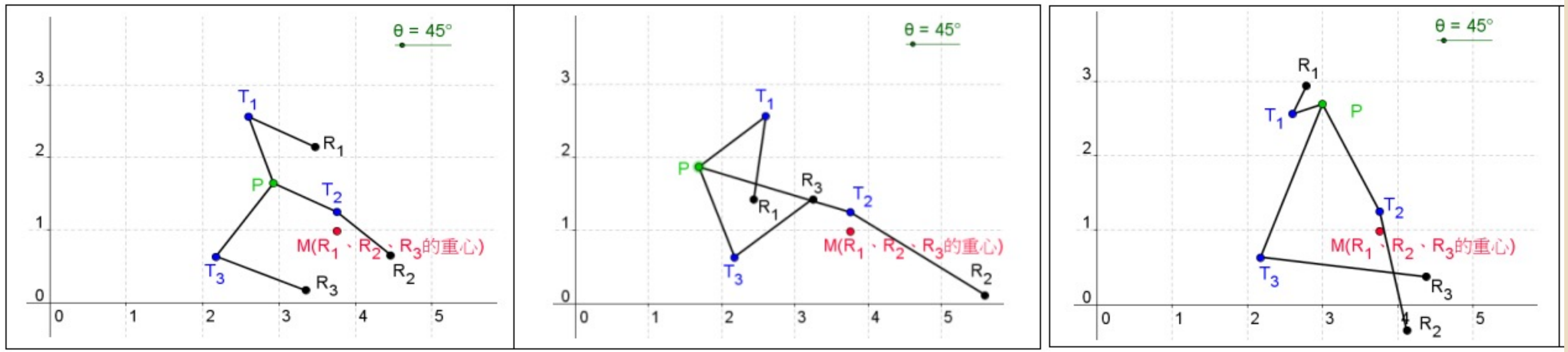
∵A，B 為兩定點∴a+b= $\overline{AB}$為定值，又α為一固定角度，

∴不論 P 點如何變動，M 的坐標為$\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}\cos\alpha，\frac{a+b}{2}\sin\alpha\right)$是一個固定的點，不會隨著 P 的改變而改變，得證■



固定點問題(多個旋轉中心)

- 如果將兩個旋轉中心(兩顆石頭)，改成三個旋轉中心(三顆石頭)，那麼三個旋轉中 心分別將椰子樹 P 作旋轉後，是否仍然可以找到固定點 M 呢？如果可以，又該如 何選取旋轉角度呢？從兩個旋轉中心時，藏寶點 M 為$\overline{R1R2}$中點(坐標相加除以二)，得到了靈感，覺得最有可能成為固定點的是重心(坐標相加除以三)。 而兩個旋轉中心的旋轉角度：逆時針旋轉α，順時針旋轉β，α + β = 180°，可改成逆時針旋轉α，逆時針旋轉−β，而α−β = α + β = 180°，旋轉角度差是180° = 360°/2，因此猜想到對三個旋轉中心而言，旋轉角度差有可能是 360°/3 = 120°。也就是均改為逆時針旋轉時，三個角度分別為θ1，θ1 + 120°，θ1 + 240°。用 Geogebra 測試此猜想之後，其結果如下面圖示，發現這猜想是正確的。



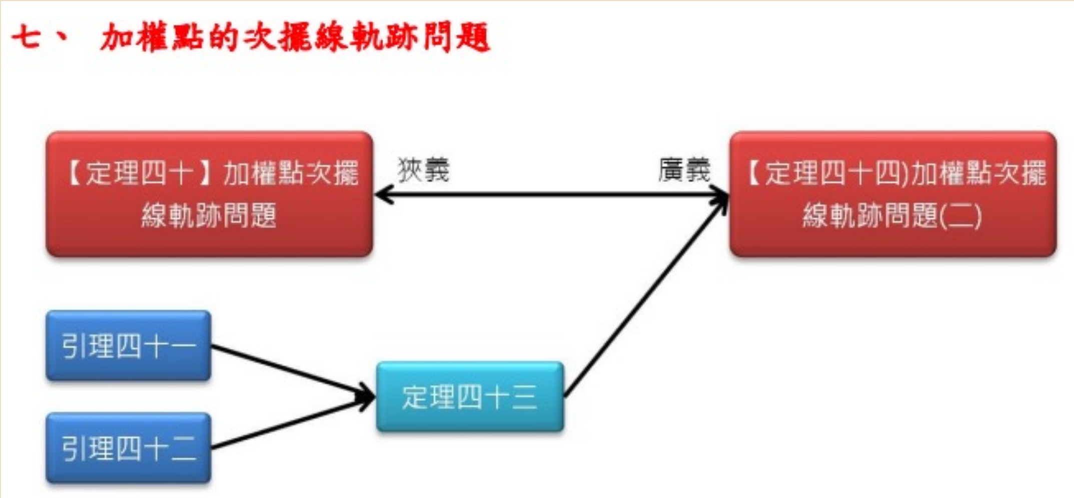
作品講評與心得

評審老師講評

研究報告厚達 251 頁，整份作品沒有挑選到精簡的複變數函數的表達方式。

我的心得與想法

這份作品大量使用到一些數學定理或需要自己先證明出來的引理，而這份作品在每個主題之後都很用心地附上這個主題的大鋼，讓人方便閱讀，如下↓



組員與分工

曾湞湞410731248

戴世勳411031102

潘柏銓411031103

林亮辰411031107

黃俊穎411031113

李柔樺411031123

姓名	工作內容
曾湞湞	主要作品詳述
戴世勳	作品介紹
潘柏銓	作品介紹
林亮辰	作品介紹
黃俊穎	作品介紹
李柔樺	作品介紹

~感謝您的聆聽與審閱~